ΕΞΩΦΥΛΛΟ

1-1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε προηγούμενες τάξεις ασχοληθήκατε με δυο περιοδικά φαινόμενα, την ομαλή κυκλική κίνηση και την απλή αρμονική ταλάντωση.

Στην ενότητα αυτή θα επεκτείνουμε την έννοια «ταλάντωση» για να συμπεριλάβουμε και τις ηλεκτρικές ταλαντώσεις.

Θα εξετάσουμε επίσης τις ταλαντώσεις των οποίων το πλάτος ελαττώνεται –τις φθίνουσες ταλαντώσεις- και τις ταλαντώσεις στις οποίες προσφέρουμε ενέργεια στο σώμα που ταλαντώνεται –τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις.

Τέλος θα ασχοληθούμε και με την περίπτωση που το σώμα συμμετέχει σε περισσότερες από μια ταλαντώσεις (σύνθετες ταλαντώσεις).

1-2 ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ

Περιοδικά φαινόμενα ονομάζονται τα φαινόμενα που εξελίσσονται και επαναλαμβάνονται αναλλοίωτα σε σταθερά χρονικά διαστήματα. Τέτοια φαινόμενα είναι η κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο, η κίνηση του εκκρεμούς, το άναμμα και το σβήσιμο του φάρου κ.ά.

Κάθε περιοδικό φαινόμενο χαρακτηρίζεται από την **περίοδό** του (Τ), το χρόνο δηλαδή που απαιτείται για να ολοκληρωθεί. Αν σε χρόνο t γίνονται N επαναλήψεις του φαινομένου, η περίοδος είναι ίση με το πηλίκο

$$T = \frac{t}{N}$$

Το αντίστροφο πηλίκο $f = \frac{N}{t}$

του αριθμού των επαναλήψεων του φαινομένου προς τον αντίστοιχο χρόνο ονομάζουμε **συχνότητα** του περιοδικού φαινομένου.

Μονάδα μέτρησης της περιόδου είναι το 1 s
και της συχνότητας το $1\ s^{-1}$ ή *1 κύκλος/s* ή *1 Hz*.

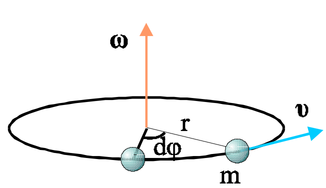
Από τον ορισμό τους, τα μεγέθη **περίοδος και συχνότητα είναι αντίστροφα.** Συνδέονται δηλαδή με τη σχέση

$$f = \frac{1}{T}$$

Ένα τρίτο μέγεθος που αναφέρεται σε όλα τα περιοδικά φαινόμενα, χωρίς άμεση φυσική σημασία, είναι η **γωνιακή συχνότητα (ω)** για την οποία ισχύει

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Μονάδα μέτρησης της γωνιακής συχνότητας είναι το 1*rad/s.*



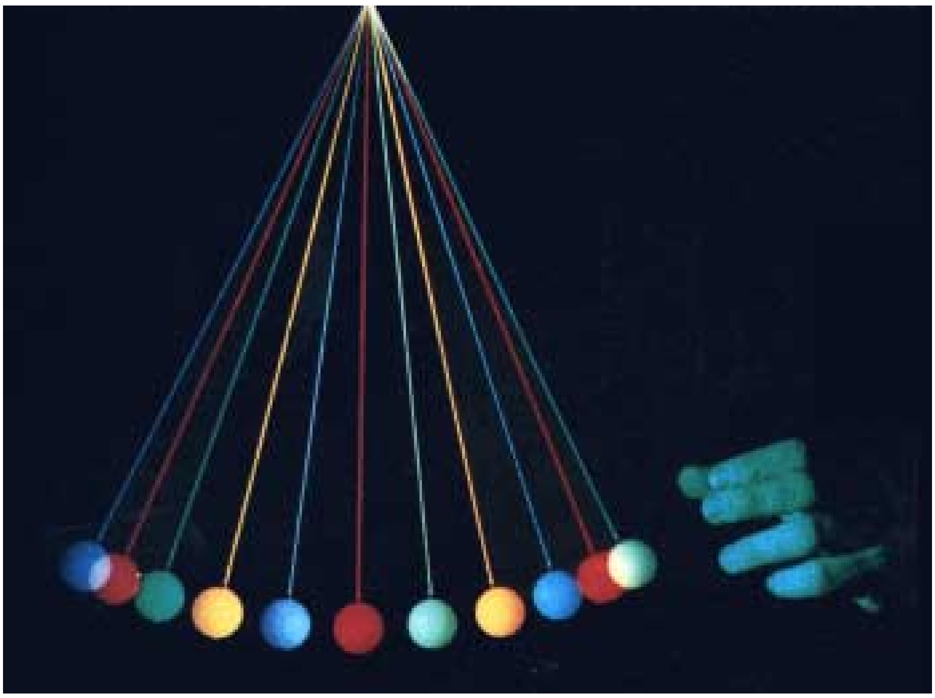
Σχ. 1.1 Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας στην κυκλική κίνηση.

<u>Παρατήρηση</u> : Στην κυκλική κίνηση ορίζεται το διανυσματικό μέγεθος γωνιακή ταχύτητα με μέτρο $\omega = \frac{d\phi}{dt}$. Στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας που έχει ως κυκλική κίνηση είναι ίσο με τη γωνιακή συχνότητα που έχει ως περιοδική κίνηση.

1-3 ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

α) Κινηματική προσέγγιση

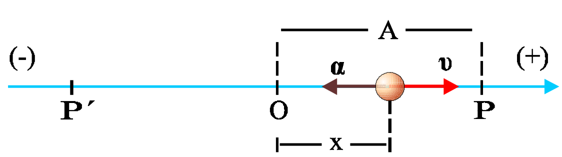
Μια περιοδική παλινδρομική κίνηση ονομάζεται **ταλάντωση.** Η ταλάντωση που γίνεται σε ευθεία τροχιά ονομάζεται **γραμμική ταλάντωση**.



Εικ. 1.1 Η κίνηση του εκκρεμούς είναι μια ταλάντωση. Στη φωτογραφία απεικονίζονται διαδοχικά στιγμιότυπα της κίνησης στη διάρκεια μισής περιόδου.

Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι μια ειδική περίπτωση γραμμικής ταλάντωσης.

Έστω ένα σώμα που κινείται παλινδρομικά πάνω σε ένα άξονα γύρω από το σημείο Ο, που είναι το μέσο της τροχιάς του.



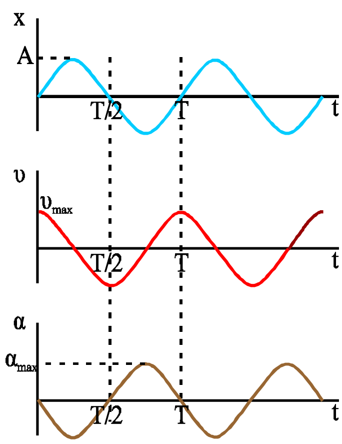
Σχ. 1.2 Το σώμα του σχήματος εκτελεί γραμμική ταλάντωση κινούμενο παλινδρομικά γύρω από το σημείο Ο, που είναι το μέσο της τροχιάς του.

Αν η απομάκρυνση x του σώματος από το σημείο Ο δίνεται κάθε στιγμή από τη σχέση

$$x = A\eta\mu\,\omega t \qquad (1.1)$$

η κίνηση του σώματος ονομάζεται **απλή αρμονική ταλάντωση**. Το A είναι η μέγιστη απομάκρυνση, δηλαδή η μέγιστη απόσταση από το σημείο Ο στην οποία φτάνει το κινητό, και ονομάζεται **πλάτος** της ταλάντωσης.

Εικ. 1.2 Διαδοχικά στιγμιότυπα της ταλάντωσης σφαίρας εξαρτημένης από ελατήριο. Το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικά στιγμιότυπα είναι σταθερό. Στη διάρκεια της φωτογράφησης η φωτογραφική πλάκα μετατοπίζεται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα. Έτσι η φωτογραφία δείχνει πως μεταβάλλεται η κατακόρυφη απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο.



Σχ. 1.3 Στα διαγράμματα φαίνεται πώς μεταβάλλεται με το χρόνο η απομάκρυνση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός σώματος που κάνει γραμμική αρμονική ταλάντωση.

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος κάθε στιγμή δίνονται από τις σχέσεις

$$\upsilon = \upsilon_{\max} \sigma\upsilon\nu\, \omega t \qquad (1.2)$$

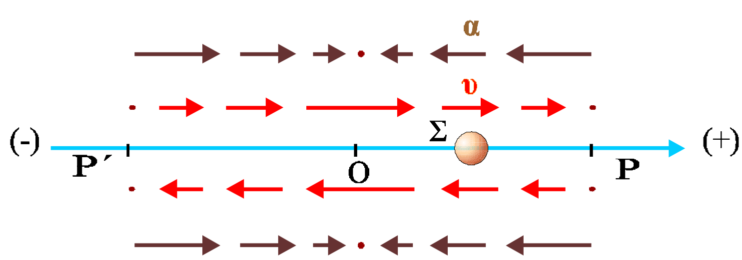
και

$$a = -a_{\max} \eta\mu\, \omega t \qquad (1.3)$$

όπου υ_{max} και α_{max}, αντίστοιχα η μέγιστη τιμή της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος. Το σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα όταν περνά από τη θέση Ο ($x = 0$) και μέγιστη επιτάχυνση όταν περνάει από τα ακραία σημεία Ρ και Ρ΄ ($x = A$ και $x = -A$ αντίστοιχα).

Για τη μέγιστη ταχύτητα και τη μέγιστη επιτάχυνση ισχύει

$$\upsilon_{\max} = \omega A \quad \text{και} \quad a_{\max} = \omega^2 A$$

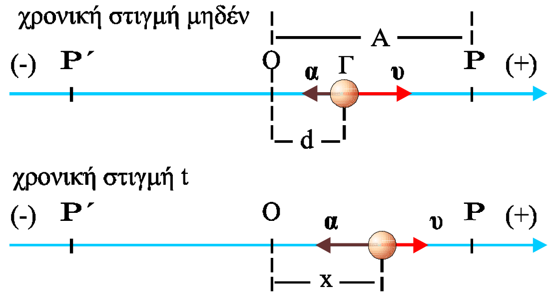


Σχ. 1.4 Το σώμα Σ κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Δίνονται σχηματικά τα διανύσματα της ταχύτητας (κόκκινο χρώμα) και της επιτάχυνσης (καφέ χρώμα), στις διάφορες θέσεις, κατά την κίνηση του. Η ταχύτητα του σώματος είναι μέγιστη τη στιγμή που το σώμα διέρχεται από το σημείο Ο, ενώ η επιτάχυνση είναι μέγιστη όταν το σώμα βρίσκεται στις ακραίες θέσεις Ρ και Ρ΄.

Εικ. 1.3 Στη φωτογραφία φαίνονται παιδιά να κάνουν κούνια. Όταν η απομάκρυνση είναι μέγιστη, η ταχύτητα είναι μηδενική.

Οι σχέσεις (1.1), (1.2) και (1.3) ισχύουν σε κάθε απλή αρμονική ταλάντωση, με την προϋπόθεση ότι τη χρονική στιγμή μηδέν το κινητό βρίσκεται στο σημείο Ο και κινείται κατά τη θετική φορά.

Αν τη χρονική στιγμή μηδέν το κινητό περνά από κάποιο άλλο σημείο, έστω το Γ (σχ. 1.5), που βρίσκεται σε απόσταση *d* από το Ο.



Σχ. 1.5 Το σώμα του σχήματος κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με αρχική φάση. Τη στιγμή t=0 βρίσκεται στη θέση Γ.

οι σχέσεις (1.1), (1.2) και (1.3) διαφοροποιούνται και γίνονται :

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi) \qquad (1.4)$$

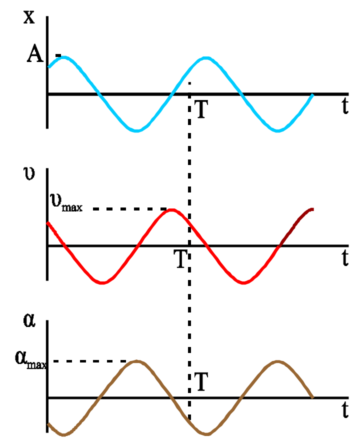
$$\upsilon = \upsilon_{\max}\,\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi)$$

$$a = -a_{\max}\,\eta\mu(\omega t + \varphi)$$

Η γωνία φ βρίσκεται από την (1.4) αν λάβουμε υπόψη ότι τη χρονική στιγμή μηδέν το κινητό βρίσκεται στο Γ. Για $t = 0$ είναι $x = d$ και η σχέση (1.4) γίνεται $d = A\eta\mu\varphi$ επομένως $\eta\mu\varphi = \dfrac{d}{A}$

Η γωνία φ ονομάζεται **αρχική φάση**. Μια τέτοια ταλάντωση λέμε ότι έχει αρχική φάση.

Η γωνία $(\omega t + \varphi)$ ονομάζεται **φάση** της ταλάντωσης.



Σχ. 1.6 Τα διαγράμματα της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε μια ταλάντωση με αρχική φάση.

β) Δυναμική προσέγγιση

Αν ένα κινητό μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση όπως αναφέραμε, σε μια τυχαία θέση έχει επιτάχυνση α, ανεξάρτητη από τη φορά της ταχύτητας. Η συνολική δύναμη που δέχεται το σώμα και είναι υπεύθυνη για την επιτάχυνσή του είναι

$$F = ma \qquad (1.5)$$

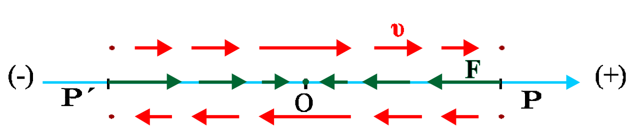
Η (1.5) γίνεται από την (1.3)

$$F = -ma_{\max}\,\eta\mu\omega t \quad \acute{\eta} \quad F = -m\omega^2 A\,\eta\mu\omega t \qquad (1.6)$$

και επειδή $x = A\eta\mu\omega t$ η (1.6) γίνεται

$$F = -m\omega^2 x \qquad (1.7)$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι όταν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση η συνολική δύναμη που δέχεται είναι ανάλογη με την απομάκρυνση του σώματος από το μέσο O της τροχιάς του και έχει αντίθετη φορά από αυτήν. Όταν το σώμα περνά από το σημείο O η συνολική δύναμη που δέχεται ισούται με μηδέν. Για το λόγο αυτό, το σημείο O ονομάζεται **θέση ισορροπίας** της ταλάντωσης.



Σχ. 1.7 Στο σχήμα δίνονται σχηματικά τα διανύσματα της ταχύτητας (κόκκινο χρώμα) και της δύναμης (πράσινο χρώμα), στις διάφορες θέσεις, κατά την ταλάντωση ενός σώματος.

Αν συμβολίσουμε με D το γινόμενο $m\omega^2$ η (1.7) γράφεται

$$F = -Dx$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή και σαν συνθήκη για την παραγωγή απλής αρμονικής ταλάντωσης. Η δύναμη F ονομάζεται **δύναμη επαναφοράς** (γιατί τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας) και η σταθερά αναλογίας D **σταθερά επαναφοράς.**

Αν σε κάποια ταλάντωση είναι γνωστή η σταθερά επαναφοράς, μπορούμε να υπολογίσουμε την περίοδό της.

Από τη σχέση $D = m\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ προκύπτει

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \qquad (1.8)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1-1

Σώμα μάζας m έχει προσδεθεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Απομακρύνουμε το σώμα κατακόρυφα και το αφήνουμε ελεύθερο. Να υπολογιστεί η περίοδος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει.

Απάντηση :

Δεν είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ (1.8), που ισχύει μόνο στις αρμονικές ταλαντώσεις, αν πρώτα δεν αποδείξουμε ότι η κίνηση του σώματος είναι απλή αρμονική ταλάντωση. Για να γίνει αυτό θα αποδείξουμε ότι η συνισταμένη δύναμη σε μια τυχαία θέση του σώματος είναι ανάλογη της απομάκρυνσής του από τη θέση ισορροπίας και αντίθετης φοράς.

Το σώμα αρχικά ισορροπεί έχοντας επιμηκύνει το ελατήριο κατά l (σχ. 1.8.β). Κατά την ισορροπία του σώματος ισχύει

$$F = w \qquad (1.9)$$

Έστω μια τυχαία θέση στην οποία θα βρεθεί το σώμα κάποια στιγμή κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του. Θεωρώντας θετική φορά τη φορά της απομάκρυνσης x από τη θέση ισορροπίας του θα ισχύει:

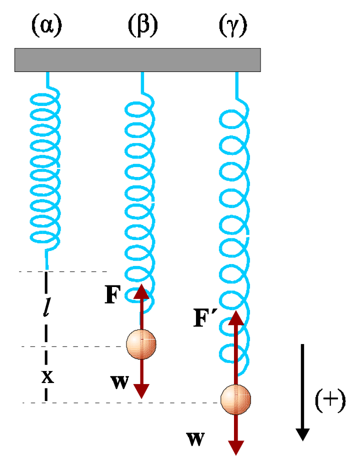
$$F_{ολ} = w - F'$$

ή, λόγω της (1.9),

$$F_{ολ} = F - F' \qquad (1.10)$$

Σύμφωνα με το νόμο του Hooke $F=Kl$ και $F'=K(l+x)$, οπότε η (1.10) γίνεται

$$F_{ολ} = -Kx \qquad (1.11)$$



Σχ. 1.8

Από την (1.11) παρατηρούμε ότι η συνισταμένη δύναμη είναι ανάλογη της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας και αντίθετης φοράς.

Επομένως η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς τη σταθερά K του ελατηρίου. Η σχέση (1.8) ισχύει και γίνεται

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

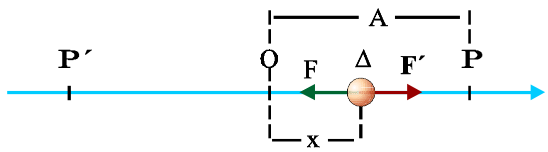
γ) Ενεργειακή προσέγγιση

Έστω και πάλι το σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Το σώμα, σε μια τυχαία θέση, έχει κινητική ενέργεια

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 συν^2\omega t = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\, συν^2\omega t \qquad (1.12)$$

Αν δεχτούμε ότι στη θέση O το σώμα έχει δυναμική ενέργεια μηδέν, σε κάθε άλλη θέση θα έχει δυναμική ενέργεια που υπολογίζεται ως εξής :

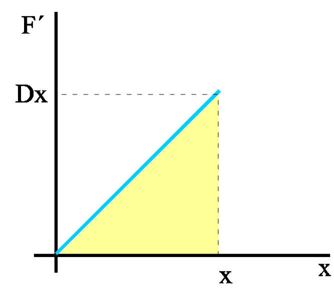
Εάν το σώμα βρίσκεται στο σημείο O και είναι ακίνητο, για να μετακινηθεί στη θέση Δ, που απέχει απόσταση *x* από τη θέση ισορροπίας, πρέπει να του ασκηθεί δύναμη **F΄** τέτοια ώστε να εξουδετερώνει τη δύναμη επαναφοράς **F**. Το μέτρο αυτής της δύναμης, σε κάθε θέση, θα είναι $F' = Dx$.



Σχ. 1.9

Το έργο της δύναμης **F΄** υπολογίζεται από τη γραφική παράσταση *F΄=f(x)*, (σχ. 1.10) και είναι $W = \frac{1}{2}Dx^2$. Το έργο της δύναμης F΄ αποθηκεύεται ως δυναμική ενέργεια στο σύστημα, επομένως

$$\boxed{U = \frac{1}{2}Dx^2} \qquad (1.13)$$

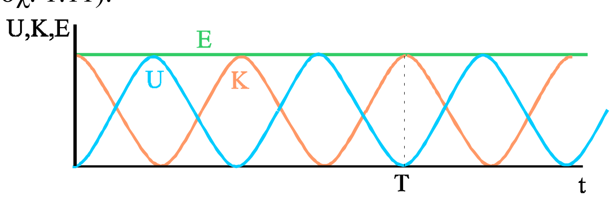


Σχ. 1.10 Για να μετατοπιστεί κατά x, στο σώμα ασκούμε δύναμη F΄=Dx. Το εμβαδόν της επιφάνειας μεταξύ του διαγράμματος και του άξονα των x είναι αριθμητικά ίσο με το έργο που απαιτήθηκε για τη μετατόπιση.

Όμως $D = m\omega^2$ και $x = A\,\eta\mu\omega t$,
οπότε η (1.13) γίνεται

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\,\eta\mu^2\omega t \qquad (1.14)$$

Από τις σχέσεις (1.12) και (1.14) προκύπτει ότι η κινητική και η δυναμική ενέργεια στην απλή αρμονική ταλάντωση μεταβάλλονται περιοδικά με το χρόνο (σχ. 1.11).



Σχ. 1.11 Στο διάγραμμα παριστάνονται η κινητική, η δυναμική και η συνολική ενέργεια της ταλάντωσης, σε συνάρτηση με το χρόνο.

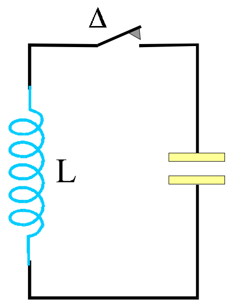
Η μηχανική ενέργεια που έχει το σύστημα σε μια τυχαία θέση δίνεται από τη σχέση $E = K + U$
η οποία από τις (1.12) και (1.14) γίνεται

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2(\sigma\upsilon\nu^2\omega t + \eta\mu^2\omega t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \quad \text{ή} \quad \boxed{E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2}$$

Η μηχανική ενέργεια στην απλή αρμονική ταλάντωση είναι σταθερή και ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους.

1-4 ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

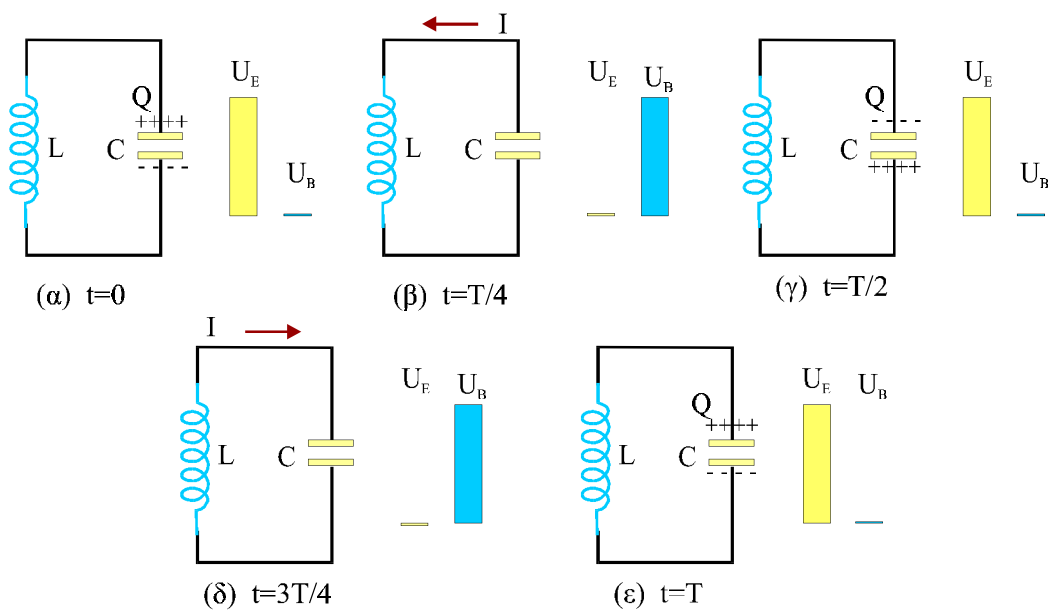


Σχ. 1.12 Στους οπλισμούς πυκνωτή έχει συνδεθεί μέσω διακόπτη ιδανικό πηνίο. Ένα τέτοιο κύκλωμα ονομάζεται κύκλωμα LC.

Στους οπλισμούς πυκνωτή χωρητικότητας C (σχ.1.12) συνδέουμε πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L. Το πηνίο και οι αγωγοί δεν έχουν αντίσταση.

Φορτίζουμε τον πυκνωτή (π.χ. φέρνοντας σε επαφή τους οπλισμούς του με τους πόλους πηγής συνεχούς τάσης) με φορτίο Q και κλείνουμε το διακόπτη Δ (σχ. 1.13α). Αρχίζει τότε η εκφόρτιση του πυκνωτή και το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα. Η ένταση του ρεύματος, λόγω της αυτεπαγωγής του πηνίου, αυξάνεται σταδιακά και γίνεται μέγιστη (I) τη στιγμή της πλήρους εκφόρτισης του πυκνωτή (σχ. 1.13β).

Το ρεύμα, εξαιτίας του φαινομένου της αυτεπαγωγής στο πηνίο, δε μηδενίζεται αμέσως μετά την εκφόρτιση του πυκνωτή. Το κύκλωμα συνεχίζει για λίγο χρόνο να διαρρέεται από ρεύμα που συνεχώς ελαττώνεται. Η κίνηση αυτή των φορτίων έχει ως αποτέλεσμα ο πυκνωτής να φορτιστεί πάλι, τώρα όμως με αντίθετη πολικότητα. Όταν το ρεύμα μηδενιστεί ο πυκνωτής θα έχει αποκτήσει πάλι φορτίο Q (σχ. 1.13γ).



Σχ. 1.13 Τη στιγμή μηδέν, που ο πυκνωτής έχει φορτίο Q, κλείνουμε το διακόπτη. Στο σχήμα φαίνονται διάφορες φάσεις της ηλεκτρικής ταλάντωσης του κυκλώματος κατά τη διάρκεια μιας περιόδου.

Στη συνέχεια η διαδικασία επαναλαμβάνεται αντίστροφα. Ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται, το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα και το κύκλωμα επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση (σχ. 1.13δ-ε). Στην ιδανική περίπτωση που δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνέχεια. Το φαινόμενο ονομάζεται **ηλεκτρική ταλάντωση**.

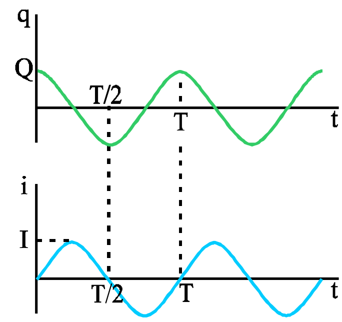
Αποδεικνύεται ότι το φορτίο του πυκνωτή μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση

$$q = Q\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t \qquad (1.15)$$

και η ένταση του ρεύματος στο πηνίο, σύμφωνα με τη σχέση

$$i = I\,\eta\mu\,\omega t \qquad (1.16)$$

Στις σχέσεις αυτές, χρονική στιγμή μηδέν θεωρείται η στιγμή που κλείνουμε το διακόπτη.



Σχ. 1.14 Οι γραφικές παραστάσεις του φορτίου στον πυκνωτή και του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο, σε κύκλωμα LC.

Από ενεργειακή άποψη, η αρχική ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή $U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ με την εκφόρτισή του ελαττώνεται και μετατρέπεται σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο $U_B = \frac{1}{2}Li^2$. Όταν ο πυκνωτής εκφορτιστεί εντελώς η ενέργειά του είναι μηδενική και όλη η ενέργειά του έχει μετατραπεί σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο, η οποία τώρα έχει αποκτήσει τη μέγιστη τιμή της $U_E = \frac{1}{2}LI^2$. Στη συνέχεια αυτή η διαδικασία γίνεται αντίστροφα, μειώνεται η ενέργεια στο πηνίο και αυξάνεται στον πυκνωτή, μέχρι την πλήρη φόρτισή του οπότε το κύκλωμα επανέρχεται ενεργειακά στην αρχική του κατάσταση. Η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται.

Οι ενέργειες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου κάποια στιγμή είναι, αντίστοιχα

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \qquad (1.17)$$

και

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 \qquad (1.18)$$

Η ολική ενέργεια του κυκλώματος στην ιδανική περίπτωση όπου δεν υπάρχουν απώλειες, θεωρείται σταθερή και είναι

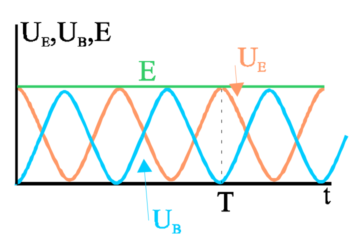
$$E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}LI^2$$

Η σχέση (1.17) γίνεται από την (1.15)

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\sigma\upsilon\nu^2\omega t = E\,\sigma\upsilon\nu^2\omega t \qquad (1.19)$$

και η (1.18) από τη (1.16)

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2\,\eta\mu^2\omega t = E\,\eta\mu^2\omega t \qquad (1.20)$$



Σχ. 1.15 Η ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή, μετατρέπεται περιοδικά σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο.

Από τις σχέσεις (1.19) και (1.20) φαίνεται αυτό που προηγουμένως περιγράψαμε ποιοτικά, ότι δηλαδή η ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή μετατρέπεται περιοδικά σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο και αντίστροφα. Στο σχήμα 1.15 βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις των U_E και U_B σε συνάρτηση με το χρόνο. Να σημειωθεί ότι το άθροισμα U_E και U_B διατηρείται σταθερό.

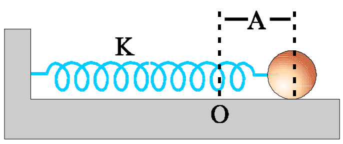
Περιγράψαμε την ηλεκτρική ταλάντωση με την προϋπόθεση ότι η ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Η κατάσταση αυτή, όμως, είναι ιδανική. Στην πραγματικότητα υπάρχουν δυο λόγοι για τους οποίους η ενέργεια του συστήματος μειώνεται. Πρώτον, οι αγωγοί του συστήματος έχουν αντίσταση κι επομένως ένα μέρος της ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα. Δεύτερον, τα κυκλώματα ηλεκτρικών ταλαντώσεων εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, δηλαδή χάνουν ενέργεια.

Η περίοδος Τ ενός τέτοιου ιδανικού κυκλώματος είναι

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \tag{1.21}$$

Αξιοσημείωτο είναι ότι η περίοδος εξαρτάται μόνο από τη χωρητικότητα και την αυτεπαγωγή του κυκλώματος.

Παρατήρηση



Σχ. 1.16 Η ηλεκτρική ταλάντωση παρουσιάζει αναλογίες με την ταλάντωση που εκτελεί το σώμα του σχήματος.

Η ηλεκτρική ταλάντωση ενός τέτοιου κυκλώματος, παρουσιάζει αναλογίες με την απλή αρμονική ταλάντωση που εκτελεί σώμα μάζας *m* προσδεμένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς *K*. Αν το σώμα στο σχήμα 1.16 απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας και αφεθεί ελεύθερο να κινηθεί, χωρίς τριβές, θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Αν ως χρονική στιγμή μηδέν θεωρηθεί η στιγμή κατά την οποία αφέθηκε ελεύθερο, η ταλάντωση θα έχει αρχική φάση π/2.

Οι σχέσεις που περιγράφουν την απομάκρυνση και την ταχύτητα του σώματος κάθε στιγμή είναι

$$x = A\,\eta\mu(\omega t + \pi/2) = A\,\sigma\upsilon\nu\omega t$$

$$\upsilon = \upsilon_{\max}\ \sigma\upsilon\nu(\omega t + \pi/2) = -\upsilon_{\max}\ \eta\mu\omega t$$

Στην ηλεκτρική ταλάντωση το φορτίο στον πυκνωτή και το ρεύμα στο κύκλωμα μεταβάλλονται όπως η απομάκρυνση και η ταχύτητα στη μηχανική ταλάντωση που περιγράψαμε.

Στο μηχανικό σύστημα, η αρχική δυναμική ενέργεια $\frac{1}{2}KA^2$ μετατρέπεται σε κινητική, ενώ η συνολική ενέργεια - μηχανική ενέργεια - διατηρείται. Αντίστοιχα στο κύκλωμα LC, η αρχική ενέργεια $E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ -ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου - μετατρέπεται περιοδικά σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου, ενώ η συνολική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2

Κύκλωμα LC αποτελείται από πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής L=2mH, και πυκνωτή χωρητικότητας C=5μF. Φέρουμε στιγμιαία τους οπλισμούς του πυκνωτή σε επαφή με πηγή τάσης V=20V.

α) Να υπολογιστεί η συχνότητα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων στο κύκλωμα.

β) Να γραφούν οι σχέσεις που δίνουν το φορτίο στον πυκνωτή και το ρεύμα στο κύκλωμα σε συνάρτηση με το χρόνο.

Απάντηση :

α) Η περίοδος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων στο κύκλωμα είναι

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Επομένως η συχνότητα $f = 1/T$ είναι

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 16\times10^2\,Hz$$

β) Αν στιγμή μηδέν θεωρηθεί η στιγμή κατά την οποία φορτίστηκε ο πυκνωτής από την πηγή, το φορτίο που απέκτησε ο πυκνωτής εκείνη τη στιγμή είναι

$$Q = CV = \left(5\times10^{-6}\,F\right)\cdot\left(20\,V\right) = 10^{-4}\,C$$

Η γωνιακή συχνότητα είναι

$$\omega = 2\pi f = 10^4\,rad/s$$

Επομένως η σχέση που δίνει το φορτίο στον πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο είναι

$$q = Q\,\sigma\upsilon\nu\omega t = 10^{-4}\ \text{συν}10^4 t \qquad \text{(S.I.)}$$

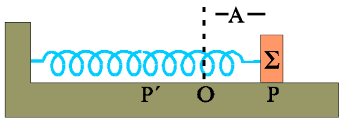
Αν θεωρήσουμε ότι η ενέργεια στο κύκλωμα διατηρείται, η μέγιστη ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο είναι ίση με τη μέγιστη ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή, επομένως

$$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}LI^2 \quad \text{άρα} \quad I = \frac{Q}{\sqrt{LC}} = 1A$$

Η σχέση που δίνει το ρεύμα στο κύκλωμα σε συνάρτηση με το χρόνο είναι

$$i = I\ \text{ημ}\omega t = \eta\mu 10^4 t \qquad \text{(S.I.)}$$

1-5 ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ



Σχ. 1.17 Απομακρύνουμε το σώμα Σ από τη θέση ισορροπίας O και το αφήνουμε ελεύθερο στο σημείο P. Το σώμα λόγω τριβών δεν επιστρέφει στο P.

Α. ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

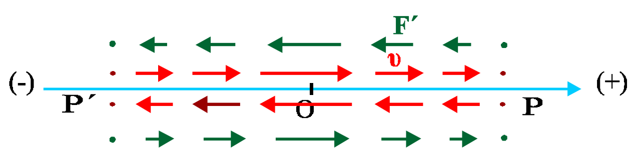
Το σώμα Σ του σχήματος 1.17 απομακρύνεται κατά A από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο στη θέση P. Όταν ολοκληρώσει μια ταλάντωση, όσο μικρή και αν είναι η τριβή του με το δάπεδο, δε θα επιστρέψει στο σημείο P. Αν το σώμα συνεχίσει την ταλάντωσή του, χωρίς εξωτερική επέμβαση, το πλάτος της ταλάντωσης συνεχώς θα μειώνεται και μετά από ορισμένο χρόνο θα σταματήσει. Μια τέτοια ταλάντωση ονομάζεται **φθίνουσα ή αποσβεννύμενη ταλάντωση**. Φθίνουσα είναι η ταλάντωση που κάνει ένα σώμα όταν είναι κρεμασμένο από ελατήριο και κινείται μέσα στον αέρα, όπως και η ταλάντωση του εκκρεμούς. Όλες οι ταλαντώσεις στο μακρόκοσμο είναι φθίνουσες γιατί καμιά κίνηση δεν είναι απαλλαγμένη από τριβές και αντιστάσεις.

Εικ. 1.4 Ο καταδύτης θέτει σε ταλάντωση το βατήρα. Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται, λόγω τριβών.

Η **απόσβεση** (ελάττωση του πλάτους) οφείλεται σε δυνάμεις που αντιτίθενται στην κίνηση. Οι δυνάμεις αυτές μεταφέρουν ενέργεια από το ταλαντούμενο σύστημα στο περιβάλλον. Έτσι, η μηχανική ενέργεια του συστήματος με την πάροδο του χρόνου ελαττώνεται και το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται.

Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι φθίνουσες ταλαντώσεις στις οποίες η αντιτιθέμενη δύναμη είναι ανάλογη της ταχύτητας.

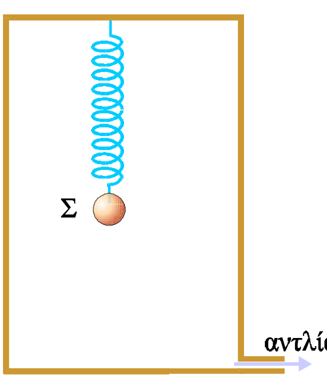
$$F' = -b\upsilon$$



Σχ. 1.18 Στο σχήμα παριστάνονται σχηματικά τα διανύσματα της ταχύτητας (κόκκινο χρώμα) και της δύναμης **F′** που αντιτίθεται στην κίνηση (πράσινο χρώμα) στις διάφορες θέσεις κατά την ταλάντωση ενός σώματος.

Τέτοια δύναμη είναι η δύναμη αντίστασης που ασκείται σε μικρά αντικείμενα που κινούνται μέσα στον αέρα ή μέσα σε υγρό.

Το b είναι μια σταθερά που ονομάζεται **σταθερά απόσβεσης** και εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου καθώς και από το σχήμα και το μέγεθος του αντικειμένου που κινείται. Ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται το πλάτος μιας ταλάντωσης εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς b.



Σχ. 1.19 Μεταβάλλοντας την πίεση μέσα στο δοχείο μεταβάλλουμε τη σταθερά απόσβεσης του ταλαντούμενου συστήματος.

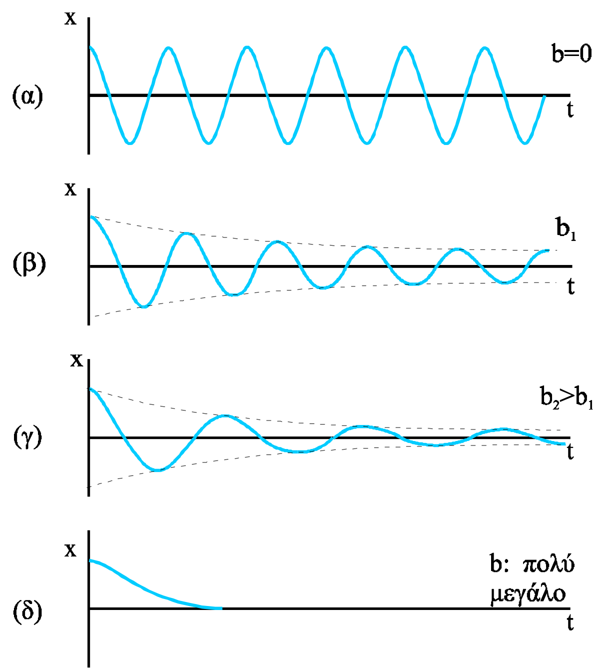
Πειραματικά ο ρόλος της σταθεράς b σε μια φθίνουσα ταλάντωση μπορεί να φανεί με τον εξής τρόπο: Με τη χρήση μιας αεραντλίας μπορούμε να μεταβάλουμε την πίεση του αέρα στο εσωτερικό του δοχείου (σχ. 1.19), μέσα στο οποίο ταλαντώνεται η σφαίρα Σ. Η μεταβολή της πίεσης μέσα στο δοχείο μεταβάλλει τη σταθερά απόσβεσης b. Στην περίπτωση που το ελατήριο είναι ιδανικό, αν αφαιρούσαμε όλο τον αέρα –κάτι που στην πράξη είναι αδύνατο- η σταθερά απόσβεσης θα ήταν μηδέν και η ταλάντωση αμείωτη (σχ.1.20α). Όταν αυξάνεται η πίεση αυξάνεται η τιμή της σταθεράς b και η απόσβεση είναι ταχύτερη.

Μελετώντας φθίνουσες ταλαντώσεις αυτής της κατηγορίας διαπιστώνουμε ότι:

α) Η περίοδος, για ορισμένη τιμή της σταθεράς *b*, διατηρείται σταθερή και ανεξάρτητη από το πλάτος (σχ.1.20β). Όταν η σταθερά *b* μεγαλώνει το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα (σχ.1.20γ) και η περίοδος παρουσιάζει μια μικρή αύξηση.

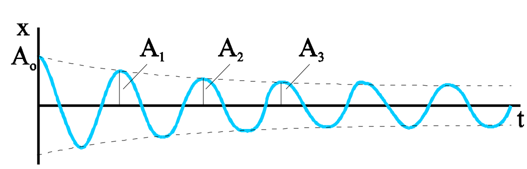
β) Σε ακραίες περιπτώσεις στις οποίες η σταθερά απόσβεσης παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, η κίνηση γίνεται απεριοδική, δηλαδή, ο ταλαντωτής, επιστρέφει στη θέση ισορροπίας χωρίς ποτέ να την υπερβεί (σχ.1.20δ)

Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να συμβεί αν το σύστημα ελατήριο σώμα βρισκόταν μέσα σ' ένα παχύρρευστο υγρό.



Σχ. 1.20 (α) Όταν η σταθερά απόσβεσης είναι μηδέν η ταλάντωση είναι αμείωτη.
(β) Φθίνουσα ταλάντωση. Η περίοδος διατηρείται σταθερή και ανεξάρτητη του πλάτους.
(γ) Όταν ο συντελεστής απόσβεσης μεγαλώνει, το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα και η περίοδος παρουσιάζει μικρή αύξηση.
(δ) Όταν ο συντελεστής απόσβεσης είναι πολύ μεγάλος η κίνηση είναι απεριοδική.

γ) Ο λόγος δύο διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση διατηρείται σταθερός, δηλαδή



Σχ. 1.21 Σε μια φθίνουσα ταλάντωση ο λόγος των διαδοχικών μέγιστων είναι σταθερός.

$$\frac{A_o}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = ... = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο

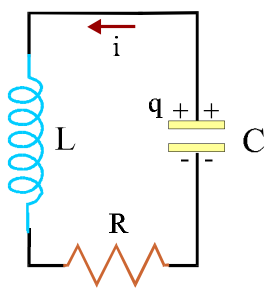
$$A_K = A_O\, e^{-\Lambda t} \qquad \text{όπου} \quad t = KT \qquad \text{και} \qquad K = 0,1,2,......$$

Το Λ είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης και τη μάζα του ταλαντούμενου σώματος.

Το σύστημα ανάρτησης του αυτοκινήτου είναι ένα σύστημα αποσβεννύμενων ταλαντώσεων. Τα αμορτισέρ εξασφαλίζουν δύναμη απόσβεσης -που εξαρτάται από την ταχύτητα- τέτοια, ώστε όταν το αυτοκίνητο περνά από ένα εξόγκωμα του δρόμου, να μη συνεχίζει να ταλαντώνεται για πολύ χρόνο. Καθώς τα αμορτισέρ παλιώνουν και φθείρονται, η τιμή του b ελαττώνεται και η ταλάντωση διαρκεί περισσότερο. Η φθορά αυτή μειώνει την ασφάλεια, επειδή οι ρόδες έχουν λιγότερη επαφή με το έδαφος.

Ενώ όμως στην περίπτωση του αυτοκινήτου είναι επιθυμητή η μεγάλη απόσβεση, σε άλλα συστήματα, όπως σε ένα εκκρεμές ρολόι, επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση της απόσβεσης.

Β. ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

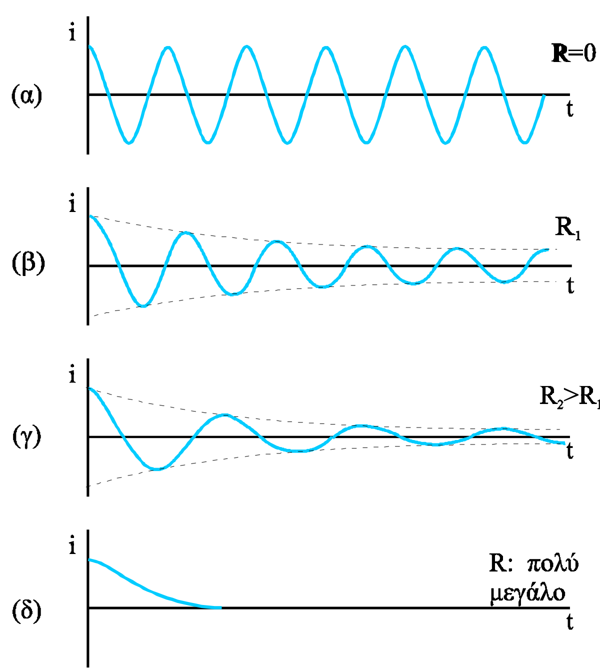


Σχ. 1.22 Κύκλωμα φθινουσών ηλεκτρικών ταλαντώσεων.

Σε ένα κύκλωμα LC (σχ. 1.22) για να είναι η ηλεκτρική ταλάντωση αμείωτη πρέπει να μην υπάρχει απώλεια ενέργειας, κάτι που πρακτικά είναι αδύνατο. Οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις είναι και αυτές φθίνουσες. Το πλάτος του ρεύματος διαρκώς μικραίνει, όπως μικραίνει και το μέγιστο φορτίο στον πυκνωτή, μέχρι που το κύκλωμα παύει να ταλαντώνεται.

Αν ληφθεί υπόψη ότι ο κύριος λόγος της απόσβεσης είναι η ωμική αντίσταση, μπορούμε μεταβάλλοντάς την να παρατηρήσουμε αντίστοιχη συμπεριφορά με αυτή των μηχανικών ταλαντώσεων της προηγούμενης παραγράφου. Συγκεκριμένα, η αύξηση της αντίστασης έχει ως αποτέλεσμα να γίνεται πιο γρήγορη η απόσβεση.

Για ορισμένη τιμή της αντίστασης, η περίοδος είναι σταθερή. Η περίοδος της ταλάντωσης μεγαλώνει όταν μεγαλώνει η αντίσταση. Τέλος, αν η τιμή της αντίστασης υπερβεί κάποιο όριο η ταλάντωση γίνεται απεριοδική.



Σχ. 1.23 (α) Αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση. (β) και (γ) Φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις. (δ) Όταν η αντίσταση είναι πολύ μεγάλη το φαινόμενο δεν είναι περιοδικό.

1-6 ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

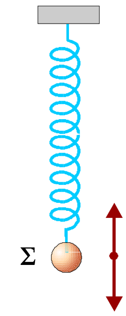
Α. ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Αν το σφαιρίδιο του σχήματος 1.24 εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του και αφεθεί ελεύθερο θα εκτελέσει κατακόρυφη ταλάντωση. Αν δεν υπάρχουν αντιστάσεις η ταλάντωση θα είναι αμείωτη, με συχνότητα

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

Στην πραγματικότητα η ταλάντωση θα είναι φθίνουσα και η συχνότητά της θα είναι λίγο μικρότερη.

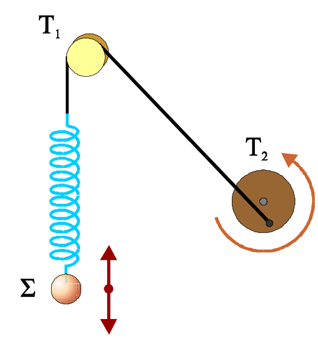
Μια τέτοια ταλάντωση λέγεται **ελεύθερη ταλάντωση** και η συχνότητα με την οποία πραγματοποιείται λέγεται **ιδιοσυχνότητα** (f_o) (ή **φυσική συχνότητα**) της ταλάντωσης.



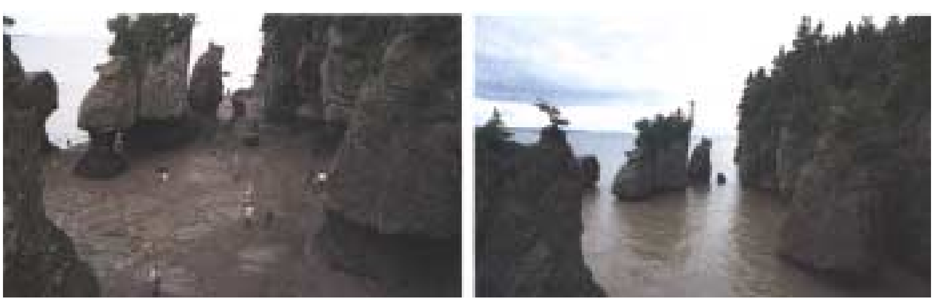
Σχ. 1.24 Το σώμα Σ απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο. Η ταλάντωσή του είναι ελεύθερη.

Αν θέλουμε να διατηρείται σταθερό το πλάτος της ταλάντωσης πρέπει να ασκήσουμε στο σύστημα μια δύναμη που μεταβάλλεται περιοδικά με το χρόνο. Αυτή την πρόσθετη δύναμη την ονομάζουμε **διεγείρουσα δύναμη**.

Στη διάταξη του σχήματος 1.25 το ελατήριο είναι δεμένο με σχοινί, το άλλο άκρο του οποίου προσδένεται στον τροχό T_2 ο οποίος, με κατάλληλη διάταξη, μπορεί να περιστρέφεται. Η περιστροφή του τροχού αναγκάζει το σφαιρίδιο να εκτελεί κατακόρυφη ταλάντωση. Η συχνότητα της ταλάντωσης συμπίπτει με τη συχνότητα περιστροφής του τροχού. Η κίνηση του σφαιριδίου ονομάζεται **εξαναγκασμένη ταλάντωση** και το σώμα που προκαλεί την ταλάντωση με την περιοδική δύναμη που ασκεί (διεγείρουσα δύναμη) –στο παράδειγμά μας ο τροχός- **διεγέρτης**.



Σχ. 1.25 Το σώμα Σ εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση.



Εικ. 1.5 Το φαινόμενο της παλίρροιας στον κόλπο του Fundy στον Καναδά. Η βαρυτική έλξη της Σελήνης εξαναγκάζει τη μάζα του νερού στην επιφάνεια της Γης σε ταλάντωση.

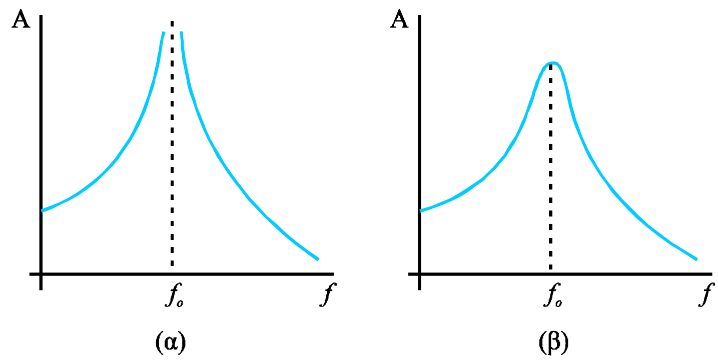
Όπως είπαμε, η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης που εκτελεί το σφαιρίδιο Σ είναι f και όχι f_o, δηλαδή ο διεγέρτης επιβάλλει στην ταλάντωση τη συχνότητά του.

Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης εξαρτάται από τη συχνότητα f του διεγέρτη. Συγκεκριμένα, αν μεταβληθεί η συχνότητα f του διεγέρτη μεταβάλλεται και το πλάτος της εκτελούμενης ταλάντωσης. Οι τιμές του πλάτους είναι γενικά μικρές, εκτός αν η συχνότητα f πλησιάζει στην ιδιοσυχνότητα f_o, οπότε το πλάτος παίρνει μεγάλες τιμές και γίνεται μέγιστο όταν η συχνότητα f γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα f_o. Τότε λέμε ότι έχουμε **συντονισμό**.

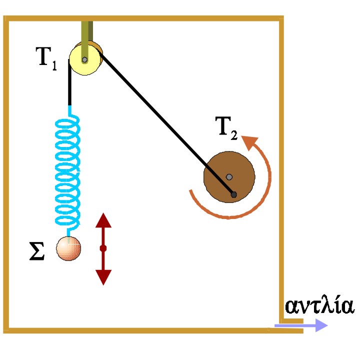
Εικ. 1.6 Σ' ένα κουρδιστό ρολόι η αποθηκευμένη ενέργεια στο σπειροειδές ελατήριο αντισταθμίζει τις απώλειες λόγω τριβών και διατηρεί το πλάτος των ταλαντώσεων αμείωτο. Κάποτε η ενέργεια τελειώνει και το ρολόι θέλει κούρδισμα.

Στην ιδανική περίπτωση που η ταλάντωση δεν έχει απώλειες ενέργειας (πρακτικά αυτό είναι αδύνατο), όταν $f=f_0$, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης γίνεται άπειρο.

Σχ. 1.26 Τα διαγράμματα του πλάτους μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης, σε συνάρτηση με τη συχνότητα του διεγέρτη.
(α) Ταλάντωση χωρίς απόσβεση. (β) Ταλάντωση με απόσβεση.



Εικ. 1.7 Τα παιδιά, από πολύ μικρή ηλικία, μαθαίνουν ότι οι κινήσεις που κάνουν με τα πόδια τους όταν κάνουν κούνια πρέπει να έχουν μια συγκεκριμένη συχνότητα. Τότε επιτυγχάνεται συντονισμός και το πλάτος της αιώρησης γίνεται μέγιστο.



Σχ. 1.27 Το σώμα Σ εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση, μέσα σε δοχείο στο οποίο μπορούμε να μεταβάλλουμε την πίεση του αέρα.

Με τη διάταξη του σχήματος 1.27 μπορούμε να παρατηρήσουμε το πλάτος της ταλάντωσης σε συνάρτηση με τη συχνότητα του διεγέρτη, για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης. Στο σχήμα 1.28 παριστάνεται το πλάτος της ταλάντωσης για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης, Το πλάτος της ταλάντωσης κατά το συντονισμό εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης. Η αύξηση της σταθεράς απόσβεσης, συνεπάγεται μείωση του πλάτους της εξαναγκασμένης ταλάντωσης και, ταυτόχρονα, μετατόπιση της συχνότητας συντονισμού σε μικρότερες τιμές. Η μετατόπιση της συχνότητας συντονισμού προς μικρότερες τιμές επιβεβαιώνει την παρατήρηση ότι με την αύξηση του b η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή μικραίνει (όπως αναφέρθηκε και στην παράγραφο 1-5).

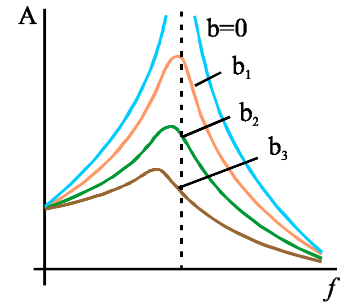
Το σημείο από το οποίο ξεκινούν όλες οι καμπύλες στο διάγραμμα, απέχει από την αρχή των αξόνων όσο απέχει το σημείο πρόσδεσης του σχοινιού από το κέντρο του τροχού T_2.

Ενεργειακή μελέτη

Στις ελεύθερες ταλαντώσεις κατά τη διέγερση του συστήματος δίνεται σε αυτό κάποια μηχανική ενέργεια, η οποία διατηρείται σταθερή -αν η ταλάντωση είναι αμείωτη- ή μετατρέπεται σταδιακά σε θερμότητα -αν είναι φθίνουσα. Στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, στο σύστημα προσφέρεται συνεχώς ενέργεια με συχνότητα f μέσω της διεγείρουσας δύναμης.

Η ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα αντισταθμίζει τις απώλειες και έτσι το πλάτος της ταλάντωσης διατηρείται σταθερό.

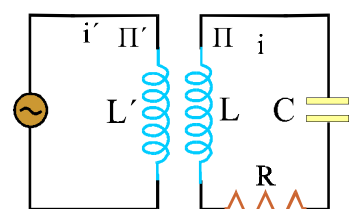
Ο τρόπος με τον οποίο το ταλαντούμενο σύστημα αποδέχεται την ενέργεια είναι εκλεκτικός και έχει να κάνει με τη συχνότητα υπό την οποία προσφέρεται. Κατά το συντονισμό η ενέργεια μεταφέρεται στο σύστημα κατά το βέλτιστο τρόπο, γι αυτό και το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο.



Σχ. 1.28 Τα διαγράμματα του πλάτους μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης συναρτήσει της συχνότητας του διεγέρτη για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης ($b_1<b_2<b_3$).

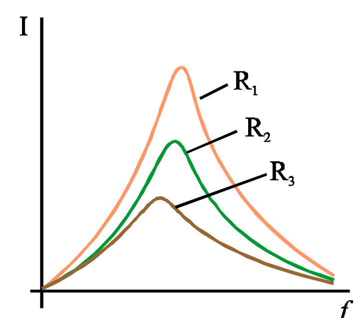
Β. ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Ένα κύκλωμα LC αν διεγερθεί (π.χ. με στιγμιαία επαφή των οπλισμών του πυκνωτή με τους πόλους πηγής συνεχούς τάσης) εκτελεί ελεύθερη ηλεκτρική ταλάντωση. Αν το κύκλωμα είναι ιδανικό (δεν έχει αντίσταση) η συχνότητα της ταλάντωσης είναι $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, αν όμως η αντίσταση του κυκλώματος δεν είναι μηδενική η συχνότητα της ταλάντωσης θα είναι ελαφρώς μικρότερη.



Σχ. 1.29 Στο κύκλωμα LC δημιουργείται εξαναγκασμένη ηλεκτρική ταλάντωση.

Όπως συμβαίνει στις μηχανικές ταλαντώσεις, στο κύκλωμα μπορεί να δημιουργηθεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Ως διεγέρτης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα πηνίο *Π΄* συζευγμένο με το πηνίο *Π* (σχ. 1.29). Αν διαβιβάσουμε εναλλασσόμενο ρεύμα *i΄*, στο πηνίο *Π΄*, στο πηνίο *Π* εμφανίζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη από αμοιβαία επαγωγή και τελικά το κύκλωμα LC διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα *i*,που έχει την ίδια συχνότητα με το ρεύμα *i΄*. Μεταβάλλοντας τη συχνότητα f του ρεύματος *i΄*, μεταβάλλεται το πλάτος της έντασης *i*, και γίνεται μέγιστο όταν $f = f_o$. Τότε έχουμε συντονισμό. Οι γραφικές παραστάσεις του πλάτους του ρεύματος *I* σε συνάρτηση με τη συχνότητα f, για διάφορες τιμές της ωμικής αντίστασης, είναι αντίστοιχες με αυτές των μηχανικών ταλαντώσεων (σχ. 1.30).



Σχ.1.30 Τα διαγράμματα του πλάτους της έντασης του ρεύματος σε μια εξαναγκασμένη ηλεκτρική ταλάντωση, για διάφορες τιμές της αντίστασης του κυκλώματος ($R_1<R_2<R_3$)

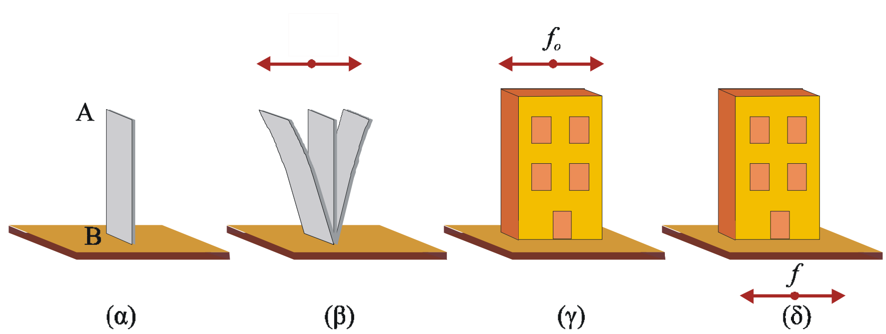
Εφαρμογές του συντονισμού

Τα παραδείγματα του συντονισμού στη φυσική είναι πολλά. Ο συντονισμός λαμβάνεται πολύ σοβαρά υπόψη σε πολλές εφαρμογές που αφορούν στην καθημερινή μας ζωή.

. **1.8** Όταν η συχνότητα ενός τικού κύματος γίνει ίση με την συχνότητα του κρυστάλλινου ηριού, το ποτήρι ταλαντώνεται το μέγιστο δυνατό πλάτος και κά σπάει.

Το ΑΒ (σχ. 1.31) είναι ένα μεταλλικό έλασμα, στερεωμένο στο κάτω άκρο του Β σε ακλόνητο δάπεδο (σχ. 1.31α). Αν τραβήξουμε το άκρο Α του ελάσματος και το αφήσουμε ελεύθερο, θα εκτελέσει ταλάντωση, με συχνότητα ίση με την ιδιοσυχνότητά του (σχ. 1.31β). Θεωρητικά ένα κτίριο (σχ. 1.31γ), αν διεγερθεί, έχει τη δυνατότητα να εκτελέσει ελεύθερη ταλάντωση, παρόμοια με αυτή του ελάσματος με ιδιοσυχνότητα f_o. Στη διάρκεια ενός σεισμού, το έδαφος πάλλεται με συχνότητα f (σχ. 1.31δ) και τα κτίρια εξαναγκάζονται να εκτελέσουν ταλάντωση. Αν η συχνότητα f με την οποία πάλλεται το έδαφος (διεγέρτης) είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα f_o του κτιρίου, το πλάτος της ταλάντωσης του κτιρίου θα γίνει μεγάλο, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει στην κατάρρευσή του.

Σχ. 1.31 Το κτίριο συμπεριφέρεται όπως το μεταλλικό έλασμα. Όταν ταλαντώνεται το έδαφος (σεισμός) το κτίριο κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση.



Η χορδή του σχήματος 1.32α έχει στερεωμένα τα άκρα της σε ακλόνητα σημεία. Αν την τραβήξουμε από το μέσον της Μ και την αφήσουμε ελεύθερη, θα εκτελέσει ταλάντωση με τη φυσική της συχνότητα (ιδιοσυχνότητα). Παρόμοια κίνηση μπορεί να εκτελέσει και η γέφυρα του σχήματος 1.32β αν διεγερθεί.

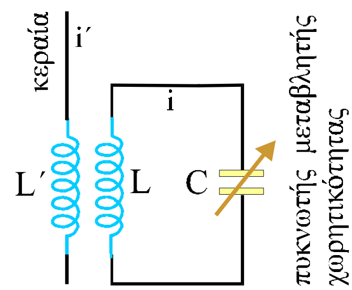
Αν μια ομάδα ανθρώπων κινηθεί με βηματισμό πάνω στη γέφυρα, η γέφυρα διεγείρεται και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Αν η συχνότητα βηματισμού είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα της γέφυρας, έχουμε συντονισμό, η γέφυρα ταλαντώνεται με μεγάλο πλάτος και υπάρχει κίνδυνος κατάρρευσης.

(α) (β)

Σχ. 1.32 Μια γέφυρα συμπεριφέρεται όπως η χορδή. Μια ομάδα ανθρώπων που κινείται πάνω στη γέφυρα με βηματισμό μπορεί να την κάνει να ταλαντώνεται με μεγάλο πλάτος.

Ένα τέτοιο ατύχημα συνέβη στη Γαλλία το 1850. Μια γέφυρα κατέρρευσε και 226 στρατιώτες σκοτώθηκαν. Από τότε, όταν ένα τμήμα στρατού περνάει πάνω από γέφυρα, οι στρατιώτες προχωρούν με ελεύθερο βηματισμό.

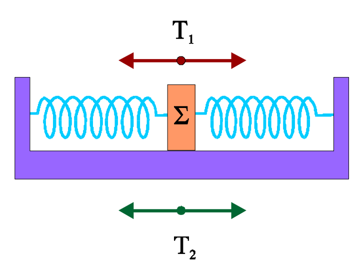
Κάθε ραδιοφωνικός σταθμός εκπέμπει σε ορισμένη συχνότητα. Στην κεραία ενός ραδιοφώνου κάθε στιγμή φτάνουν πολλά ηλεκτρομαγνητικά κύματα, με διαφορετικές συχνότητες. Η επιλογή ενός σταθμού στο ραδιόφωνο στηρίζεται στο φαινόμενο του συντονισμού. Όταν γυρίζουμε το κουμπί επιλογής των σταθμών μεταβάλλουμε τη χωρητικότητα ενός μεταβλητού πυκνωτή. Ο πυκνωτής αυτός είναι μέρος ενός κυκλώματος LC, το οποίο βρίσκεται σε επαγωγική σύζευξη με την κεραία του ραδιοφώνου. Στην κεραία τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που φτάνουν αναγκάζουν τα ηλεκτρόνια της να εκτελέσουν ταλάντωση. Η κίνηση των ηλεκτρονίων στην κεραία δημιουργεί σ΄ αυτή ένα πολύ ασθενές μεταβαλλόμενο ρεύμα. Εξαιτίας της επαγωγικής σύζευξης το κύκλωμα LC εξαναγκάζεται να εκτελέσει ηλεκτρική ταλάντωση. Το πλάτος της ηλεκτρικής ταλάντωσης (πλάτος του ρεύματος) είναι ασήμαντο εκτός εάν έχουμε συντονισμό. Μεταβάλλοντας όμως τη χωρητικότητα του πυκνωτή στο κύκλωμα LC, μεταβάλλουμε την ιδιοσυχνότητά του. Όταν η ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος συμπέσει με κάποια από τις συχνότητες με τις οποίες ταλαντώνονται τα ηλεκτρόνια της κεραίας (δηλαδή με κάποια από τις συχνότητες των κυμάτων τα οποία φτάνουν στην κεραία), το κύκλωμα συντονίζεται και διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα μέγιστου πλάτους. Αυτό το σχετικά μεγάλο ρεύμα, περιέχει το ηλεκτρικό σήμα, το οποίο, ενισχυμένο, οδηγείται στο μεγάφωνο του ραδιοφώνου και το διεγείρει.



Σχ. 1.33 Το κύκλωμα επιλογής σταθμών στο ραδιόφωνο είναι ένα κύκλωμα LC, που εξαναγκάζεται σε ηλεκτρική ταλάντωση από την κεραία.

1-7 ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

Το σώμα Σ του σχήματος 1.34 βρίσκεται πάνω σε οριζόντια βάση και είναι δεμένο στις άκρες δύο ελατηρίων, οι άλλες άκρες των οποίων είναι στερεωμένες σε ακίνητα σημεία. Το σώμα μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Αν το σώμα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του και αφεθεί ελεύθερο θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση (με περίοδο T_1) . Αν και η βάση πάνω στην οποία βρίσκεται το σώμα -με κατάλληλο μηχανισμό- εκτελεί αρμονική ταλάντωση (με περίοδο T_2), το σώμα Σ κάνει ταυτόχρονα δυο αρμονικές ταλαντώσεις. Η ταλάντωση της βάσης δεν είναι απαραίτητο να γίνεται στη διεύθυνση της ταλάντωσης του σώματος.



Σχ. 1.34 Το σώμα Σ εκτελεί ταυτόχρονα δυο ταλαντώσεις.

Η κίνηση του σώματος Σ είναι, γενικά, πολύπλοκη. Η διεύθυνση, η συχνότητα, το πλάτος και η φάση της εξαρτώνται από τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά των επί μέρους ταλαντώσεων.

Η κίνηση που κάνει το σώμα λέγεται **σύνθετη ταλάντωση** και η μελέτη της **σύνθεση ταλαντώσεων.**

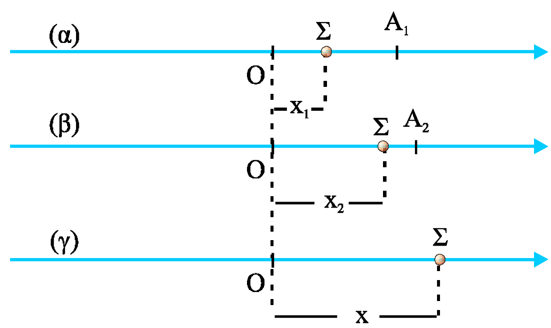
Στη συνέχεια θα μελετήσουμε μερικές ειδικές περιπτώσεις σύνθεσης ταλαντώσεων.

Α. Σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο στην ίδια διεύθυνση.

Έστω ότι ένα σώμα Σ κάνει ταυτόχρονα τις ταλαντώσεις με εξισώσεις

$$x_1 = A_1 \, \eta\mu\omega t \qquad (1.22) \ (\sigma\chi. \ 1.35\alpha)$$

$$x_2 = A_2 \, \eta\mu(\omega t + \varphi) \qquad (1.23) \ (\sigma\chi. \ 1.35\beta)$$



Σχ. 1.35 Το σώμα Σ κάνει ταυτόχρονα τις αρμονικές ταλαντώσεις (α) και (β). Η απομάκρυνσή του κάθε στιγμή είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των απομακρύνσεών του στις επιμέρους ταλαντώσεις στις οποίες μετέχει (γ).

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας των κινήσεων, η απομάκρυνση του σώματος κάθε στιγμή θα είναι το άθροισμα των απομακρύνσεων που θα είχε αν έκανε την κάθε ταλάντωση ξεχωριστά (σχ. 1.35γ), δηλαδή

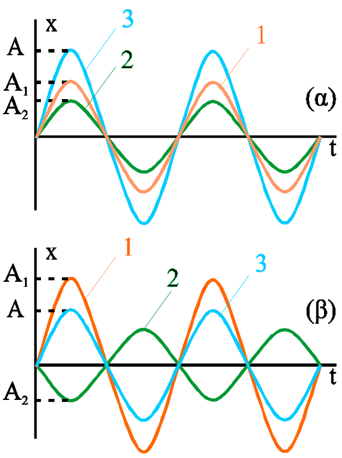
$$x = x_1 + x_2 \qquad (1.24)$$

Αν λάβουμε υπόψη τις (1.22) και (1.23) η (1.24) γίνεται

$$x = A_1 \, \eta\mu\omega t + A_2 \, \eta\mu(\omega t + \varphi) \qquad (1.25)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή

$$x = A\,\eta\mu(\omega t + \vartheta) \qquad (1.26)$$



Σχ. 1.36 (α) Από τη σύνθεση των ταλαντώσεων 1 και 2 που έχουν την ίδια φάση, προκύπτει η ταλάντωση 3. (β) Από τις ταλαντώσεις 1 και 2 που παρουσιάζουν διαφορά φάσης 180° προκύπτει η ταλάντωση 3.

όπου

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\,\varphi} \qquad (1.27)$$

και

$$\varepsilon\varphi\,\vartheta = \frac{A_2\,\eta\mu\,\varphi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\,\varphi} \qquad (1.28)$$

Το συμπέρασμα που προκύπτει από την (1.26) είναι ότι το σώμα Σ κάνει απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από το σημείο Ο, με την ίδια διεύθυνση και την ίδια συχνότητα. Το πλάτος και η αρχική φάση της ταλάντωσης εξαρτώνται από τα στοιχεία των επί μέρους ταλαντώσεων.

Στην ειδική περίπτωση που φ=0 (σχ. 1.36α), οι σχέσεις (1.27) και (1.28) δίνουν $A = A_1 + A_2$ και $\vartheta = 0$, δηλαδή το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με το άθροισμα των πλατών και η φάση της είναι ίδια με τη φάση των επιμέρους ταλαντώσεων.

Όταν φ=180°, πάλι από (1.27) και (1.28), προκύπτει ότι $A = A_1 - A_2$ και $\vartheta = 0$ ή $\vartheta = 180^o$ (σχ. 1.36β), δηλαδή το πλάτος είναι ίσο με τη διαφορά των πλατών και η φάση ίση με τη φάση της ταλάντωσης που έχει το μεγαλύτερο πλάτος.

Β. Σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο, με το ίδιο πλάτος και διαφορετικές συχνότητες.

Έστω ότι το σώμα Σ μετέχει στις ταλαντώσεις

$$x_1 = A\,\eta\mu\omega_1 t \qquad (1.29)\ (\sigma\chi.\ 1.35\alpha)$$

$$x_2 = A\,\eta\mu\omega_2 t \qquad (1.30)\ (\sigma\chi.\ 1.35\beta)$$

Και στην περίπτωση αυτή, η απομάκρυνση του σώματος κάποια στιγμή θα είναι

$$x = x_1 + x_2 \qquad (1.31)\ (\sigma\chi.\ 1.35\gamma)$$

η οποία από τις (1.29) και (1.30) γίνεται

$$x = A\,\eta\mu\omega_1 t + A\,\eta\mu\omega_2 t \qquad (1.32)$$

Με βάση την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

η (1.32) γίνεται

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \qquad (1.33)$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι η κίνηση του σώματος είναι πολύπλοκη. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η κίνηση στην περίπτωση που οι δύο επιμέρους γωνιακές συχνότητες διαφέρουν πολύ λίγο. Τότε ο παράγοντας

$$A' = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) \qquad (1.34)$$

της σχέσης (1.33) μεταβάλλεται με το χρόνο πολύ πιο αργά από τον παράγοντα $\eta\mu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$, ο οποίος μεταβάλλεται με γωνιακή συχνότητα $\overline{\omega}$ ίση με τη μέση τιμή των ω_1 και ω_2. Επειδή αυτές διαφέρουν ελάχιστα μπορούμε να γράψουμε $\overline{\omega} \approx \omega_1 \approx \omega_2$.

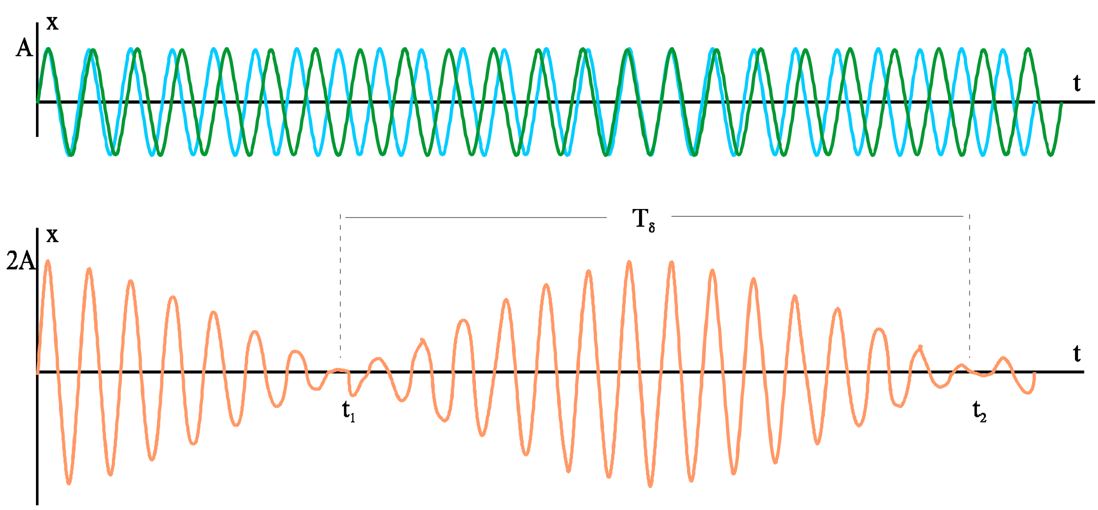
Επομένως η (1.33) μπορεί να γραφεί

$$x = A'\eta\mu\overline{\omega}t \qquad (1.35)$$

Η σχέση (1.35) περιγράφει μια ιδιόμορφη ταλάντωση που έχει την ίδια περίπου συχνότητα με τις επί μέρους ταλαντώσεις.

Το πλάτος A' της κίνησης του Σ μεταβάλλεται, με αργό ρυθμό, από μηδέν μέχρι $2A$. Λέμε ότι η κίνηση του Σ παρουσιάζει **διακροτήματα** (σχ. 1.37).

Ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς (ή δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις) του πλάτους ονομάζεται περίοδος (T_δ) του διακροτήματος.



Σχ. 1.37 Από τη σύνθεση δύο ταλαντώσεων που οι συχνότητές τους διαφέρουν πολύ λίγο (πράσινη και μπλε γραμμή) προκύπτει ιδιόμορφη περιοδική κίνηση (κόκκινη γραμμή) που παρουσιάζει διακροτήματα.

Υπολογισμός της περιόδου του διακροτήματος

Το πλάτος Α΄ μηδενίζεται όταν $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t_1\right)=0$.

Αυτό συμβαίνει όταν $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t=(2K+1)\frac{\pi}{2}$

όπου $K = 0,1,2,\ldots\ldots$

Δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές που αποτελούν λύσεις της εξίσωσης είναι οι t_1 και t_2 (σχ. 1.37) για τις οποίες

$$\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}t_1=\frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad t_1=\frac{\pi}{|\omega_1-\omega_2|}$$

και

$$\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}t_2=\frac{3\pi}{2} \quad \text{ή} \quad t_2=\frac{3\pi}{|\omega_1-\omega_2|}$$

Η διαφορά t_2-t_1 είναι η **περίοδος του διακροτήματος**.

Είναι επομένως $T_\delta=t_2-t_1=\frac{3\pi}{|\omega_1-\omega_2|}-\frac{\pi}{|\omega_1-\omega_2|}=\frac{2\pi}{|\omega_1-\omega_2|}$

ή $T_\delta=\frac{1}{|f_1-f_2|}$ ή $\frac{1}{f_\delta}=\frac{1}{|f_1-f_2|}$

και τελικά

$$f_\delta=|f_1-f_2|$$

ΣΥΝΟΨΗ

Απλή αρμονική ταλάντωση ονομάζεται η ταλάντωση στην οποία η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση

$$x = A\eta\mu\,\omega t$$

Στην ταλάντωση αυτή η ταχύτητα και η επιτάχυνση μεταβάλλονται με το χρόνο σύμφωνα με τις σχέσεις

$\upsilon = \upsilon_{\max}\,\sigma\upsilon\nu\omega t$ και $a = -a_{\max}\sigma\upsilon\nu\,\omega t$ όπου $\upsilon_{\max} = \omega A$ και $\alpha_{\max} = \omega^2 A$

Η δύναμη που αναγκάζει ένα σώμα να κάνει απλή αρμονική ταλάντωση είναι $F = -Dx$ και ονομάζεται **δύναμη επαναφοράς**. Η σχέση $F = -Dx$ αποτελεί την αναγκαία συνθήκη για να εκτελέσει ένα κινητό απλή αρμονική ταλάντωση.

Η **περίοδος** σε μια απλή αρμονική ταλάντωση είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Στην απλή αρμονική ταλάντωση η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2$$

Το κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων αποτελείται από ένα πυκνωτή συνδεδεμένο σε σειρά με ιδανικό πηνίο. Αν ένα τέτοιο κύκλωμα διεγερθεί, το φορτίο του πυκνωτή και το ρεύμα μεταβάλλονται με το χρόνο σύμφωνα με τις σχέσεις

$$q = Q\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t \qquad i = I\,\eta\mu\,\omega t$$

Η ολική ενέργεια του κυκλώματος θεωρείται σταθερή και είναι

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}LI^2$$

Φθίνουσες ονομάζονται οι ταλαντώσεις στις οποίες το πλάτος μειώνεται.

Η περίοδος σε μια φθίνουσα ταλάντωση διατηρείται σταθερή. Όταν η σταθερά απόσβεσης b μεγαλώνει το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα. Για πολύ μεγάλες τιμές της σταθεράς απόσβεσης η ταλάντωση γίνεται απεριοδική. Σε μια φθίνουσα ταλάντωση το πλάτος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.

Ιδιοσυχνότητα ενός συστήματος είναι η συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται ελεύθερα το σύστημα. Σε μια **εξαναγκασμένη ταλάντωση** η συχνότητα ταλάντωσης είναι η συχνότητα του διεγέρτη. Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης διατηρείται σταθερό και εξαρτάται από τη συχνότητα του διεγέρτη. Όταν η συχνότητα του διεγέρτη γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος το πλάτος της ταλάντωσης μεγιστοποιείται και έχουμε **συντονισμό**.

Η κίνηση που προκύπτει από **τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων** εξαρτάται από τις συχνότητες, τα πλάτη, τη διαφορά φάσης και τις διευθύνσεις των επί μέρους αρμονικών ταλαντώσεων.

Από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, της ίδιας διεύθυνσης και συχνότητας που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο, προκύπτει απλή αρμονική ταλάντωση.

Από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, της ίδιας διεύθυνσης που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο με συχνότητες που διαφέρουν πολύ λίγο, προκύπτει περιοδική κίνηση που παρουσιάζει **διακροτήματα.**

Η συχνότητα του διακροτήματος είναι

$$f_\delta = |f_1 - f_2|$$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. Εξαναγκασμένη ταλάντωση και ιδιοσυχνότητα ταλαντωτή.

Στερεώστε στο ένα άκρο ενός ελατηρίου μεγάλου μήκους ένα σώμα. Κρατήστε την άλλη άκρη του ελατηρίου με το χέρι σας. Αρχίστε να ταλαντώνετε το άκρο που κρατάτε με όσο γίνεται πιο σταθερό ρυθμό (συχνότητα). Δοκιμάστε το ίδιο για διαφορετικές συχνότητες. Για κάποιες συχνότητες (πολύ μικρότερες ή πολύ μεγαλύτερες της ιδιοσυχνότητας του ταλαντωτή) το πλάτος ταλάντωσης του σώματος είναι μικρό ακόμη κι αν το πλάτος ταλάντωσης του χεριού είναι μεγάλο. Για κάποια συχνότητα ταλάντωσης του χεριού το πλάτος ταλάντωσης του σώματος γίνεται μέγιστο. Έχετε τώρα εντοπίσει την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή.

Δοκιμάστε το ίδιο αφού αντικαταστήσετε το πρώτο σώμα με ένα άλλο που έχει μάζα το ένα τέταρτο της μάζας του πρώτου. Τώρα η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή πρέπει να έχει γίνει περίπου διπλάσια της προηγούμενης.

Σκεφτείτε, γιατί διπλασιάστηκε η ιδιοσυχνότητα;

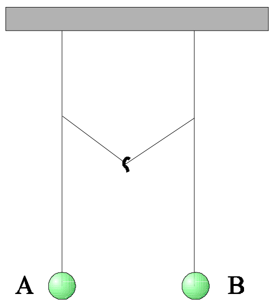
2. Συντονισμός

Σχ. 1.38

Πάρτε ένα κουτί αναψυκτικού και αδειάστε το περιεχόμενό του. Αφαιρέστε ολόκληρη την πάνω βάση του. Με ένα μεγάλο ψαλίδι κόψτε στο πλευρικό του τοίχωμα επτά κατακόρυφες λουρίδες, τη μια δίπλα στην άλλη. Οι λουρίδες πρέπει να έχουν το ίδιο πλάτος αλλά διαφορετικά μήκη (η πρώτη να έχει μήκος περίπου ίσο με το ένα τρίτο του ύψους του κουτιού και η τελευταία περίπου ίσο με τα δύο τρίτα του ύψους). Φροντίστε ώστε οι λουρίδες να έχουν σταθερό πλάτος και να υπάρχει ανάμεσά τους ένα μικρό διάκενο ώστε να μπορούν να κινούνται ελεύθερα χωρίς να ακουμπούν στις διπλανές τους. Οι επτά λουρίδες πρέπει να καταλαμβάνουν περίπου το μισό της πλευρικής επιφάνειας του κουτιού. Ακριβώς απέναντι από την τέταρτη λουρίδα (αντιδιαμετρικά) κόψτε μια ακόμη λουρίδα με το ίδιο μήκος με την τέταρτη.

Θέστε σε ταλάντωση την τελευταία λουρίδα που κόψατε και δείτε ποια από τις απέναντι λουρίδες ταλαντώνεται με μεγαλύτερο πλάτος. Πώς ερμηνεύετε την παρατήρηση;

3. Συζευγμένα εκκρεμή



Σχ. 1.39

Όταν υπάρχει δυνατότητα να μεταφέρεται ενέργεια από ένα ταλαντούμενο σύστημα σε ένα άλλο τότε λέμε ότι τα δύο συστήματα βρίσκονται σε σύζευξη. Δύο τέτοια συστήματα παριστάνονται στο σχήμα 1.39 Η περίοδος ενός εκκρεμούς εξαρτάται μόνο από το μήκος του σχοινιού του και την επιτάχυνση της βαρύτητας.. Τα δύο εκκρεμή στο σχήμα έχουν το ίδιο μήκος σχοινιού, επομένως την ίδια ιδιοσυχνότητα και είναι συνδεδεμένα με ένα νήμα στο οποίο έχουμε τοποθετήσει ένα μικρό βάρος π.χ. ένα κομματάκι σύρμα. Κατασκευάστε τη διάταξη. Θέστε σε ταλάντωση το εκκρεμές Α απομακρύνοντας το σφαιρίδιο του σε διεύθυνση κάθετη από το επίπεδο που ορίζεται από τα δύο εκκρεμή. Παρατηρήστε την κίνηση των δύο εκκρεμών. Προσπαθήστε να περιγράψετε ενεργειακά το φαινόμενο.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Απλή αρμονική ταλάντωση

1.1 Ένα σώμα δεμένο στην άκρη κατακόρυφου ελατήριου του οποίου η άλλη άκρη είναι στερεωμένη ακλόνητα, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A. Εάν διπλασιάσουμε το πλάτος της ταλάντωσης, ποια από τα μεγέθη
α) συχνότητα
β) μέγιστη ταχύτητα υ_{max}
γ) μέγιστη επιτάχυνση α_{max}
δ) σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης
ε) ενέργεια της ταλάντωσης
θα μεταβληθούν;

1.2 Ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση βρίσκεται τη χρονική στιγμή μηδέν στη θέση ισορροπίας. Ποια είναι η αρχική του φάση; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. Αρκεί, για τον υπολογισμό της αρχικής φάσης, να γνωρίζουμε τη θέση στην οποία βρίσκεται το σώμα τη χρονική στιγμή μηδέν ή χρειάζεται να γνωρίζουμε και την κατεύθυνση προς την οποία κινείται;

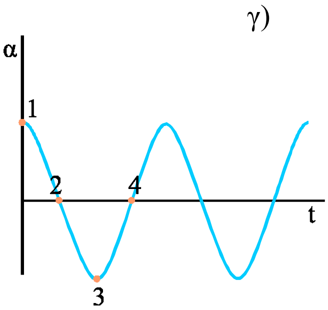
1.3 Ποια από τις επόμενες σχέσεις ανάμεσα στη συνολική δύναμη F που ασκείται σε ένα σώμα και στη θέση x του σώματος αναφέρεται σε μία απλή αρμονική ταλάντωση;
α) $F=10x$ β) $F=-100x^2$ γ) $F=-5x$ δ) $F=50x^2$

1.4.1 Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Σε ποια θέση η ταχύτητα, η επιτάχυνση και η συνολική δύναμη είναι:
α) μηδέν; β) μέγιστη;

1.5 Συμπληρώστε τις τιμές που λείπουν στον επόμενο πίνακα ο οποίος αναφέρεται στην απλή αρμονική ταλάντωση ενός σώματος.

x	U	K
0		
x_1	3 J	2 J
x_2	4 J	
A		

1.6 Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T. Τη χρονική στιγμή t=0 το σώμα βρίσκεται στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης (x=A). Ποια χρονική στιγμή
α) θα περάσει για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας;
β) θα φτάσει στη θέση x = - A;
γ) θα ξαναπεράσει από τη θέση ισορροπίας;



Σχ. 1.40

1.7 Το διάγραμμα του σχήματος 1.40 παριστάνει την επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, σε συνάρτηση με το χρόνο.
α) Ποιο σημείο του διαγράμματος αντιστοιχεί σε απομάκρυνση –A;
β) Στο σημείο 4 του διαγράμματος η ταχύτητα της ταλάντωσης είναι θετική, αρνητική ή μηδέν;
γ) Σε ποια απομάκρυνση αντιστοιχεί το σημείο 4 του διαγράμματος;

1.8 Δύο ελατήρια Α και Β κρέμονται κατακόρυφα με το ένα άκρο τους στερεωμένο ακλόνητα. Όταν από τα ελεύθερα άκρα τους κρεμάσουμε σώματα με μάζες m_A και m_B αντίστοιχα ($m_A > m_B$), τα ελατήρια επιμηκύνονται το ίδιο. Απομακρύνουμε και τα δύο σώματα από τη θέση ισορροπίας τους κατά d και τα αφήνουμε ελεύθερα, οπότε εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση. Το σύστημα Α έχει ενέργεια
α) ίση με την ενέργεια που έχει το σύστημα Β
β) μεγαλύτερη από την ενέργεια του συστήματος Β
γ) μικρότερη από την ενέργεια του συστήματος Β.
δ) Δεν υπάρχουν επαρκή στοιχεία για να συγκρίνουμε τις ενέργειες των δύο συστημάτων.
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

Κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων

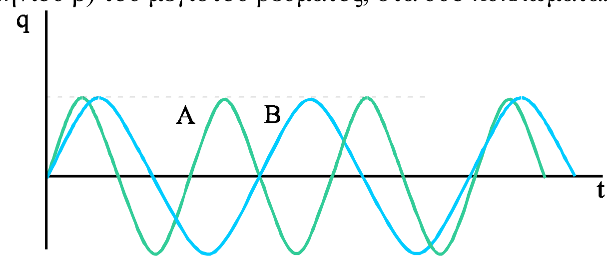
1.9 Η περίοδος με την οποία ταλαντώνεται ένα κύκλωμα είναι 3×10^{-6}s. Τη στιγμή μηδέν ο οπλισμός Α του πυκνωτή έχει μέγιστο θετικό φορτίο. Μετά από πόσο χρόνο
α) ο οπλισμός Α θα αποκτήσει μέγιστο αρνητικό φορτίο;
β) ο οπλισμός Α θα αποκτήσει ξανά μέγιστο θετικό φορτίο;
γ) η τάση στον πυκνωτή θα γίνει μηδέν;
δ) η ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου θα γίνει μέγιστη;

1.10 Ένας φορτισμένος πυκνωτής συνδέεται με ιδανικό πηνίο σε κλειστό κύκλωμα. Γιατί δεν εκφορτίζεται ακαριαία ο πυκνωτής;

1.11 Να συμπληρωθεί ο επόμενος πίνακας, που αναφέρεται σε ένα κύκλωμα αμείωτων ηλεκτρικών ταλαντώσεων.

U_E	$80\text{x}10^{-3}$ J	$120\text{x}10^{-3}$ J		
U_B			$50\text{x}10^{-3}$ J	$120\text{x}10^{-3}$ J
E	$120\text{x}10^{-3}$ J			

1.12 Διαθέτουμε δύο κυκλώματα ηλεκτρικών ταλαντώσεων Α και Β. Οι χωρητικότητες των πυκνωτών στα δύο κυκλώματα είναι ίσες. Στο σχήμα 1.41 παριστάνεται το φορτίο στους πυκνωτές των κυκλωμάτων Α και Β, σε συνάρτηση με το χρόνο. Να συγκρίνετε τις τιμές α) της αυτεπαγωγής του πηνίου β) του μέγιστου ρεύματος, στα δύο κυκλώματα.



Σχ. 1.41

1.13 Σε κύκλωμα LC ο πυκνωτής έχει μεταβλητή χωρητικότητα. Φέρουμε, στιγμιαία, σε επαφή τους οπλισμούς του πυκνωτή με του πόλους ηλεκτρικής πηγής οπότε το σύστημα αρχίζει να εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση. Αν αυξήσουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή ποιο από τα μεγέθη που ακολουθούν θα παραμείνει ίδιο, θα αυξηθεί ή θα μειωθεί;

α) Η περίοδος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων.
β) Το μέγιστο φορτίο στον πυκνωτή.
γ) Η ολική ενέργεια στο κύκλωμα.
δ) Το μέγιστο ρεύμα στο κύκλωμα.

1.14 Κύκλωμα LC εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση με συχνότητα 100kHz. Στο κύκλωμα έχουμε τη δυνατότητα να μεταβάλλουμε το συντελεστή αυτεπαγωγής L του πηνίου μετακινώντας τον πυρήνα μαλακού σιδήρου που υπάρχει σ΄ αυτό. Αν μειώσουμε το συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου σε $L/4$, η συχνότητα της ηλεκτρικής ταλάντωσης του κυκλώματος θα γίνει:

α) 25kHz β) 50kHz γ) 200kHz δ) 400kHz

Σημειώστε τη σωστή απάντηση.

1.15 Σε κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων φέρουμε στιγμιαία τους οπλισμούς του πυκνωτή σε επαφή με τους πόλους μπαταρίας 1,5V. Το κύκλωμα διεγείρεται και εκτελεί ταλάντωση. Αν η διέγερση του κυκλώματος γινόταν με μπαταρία 3V,

1) η ολική ενέργεια στο κύκλωμα θα ήταν
   α) η ίδια β) διπλάσια γ) τετραπλάσια
2) το μέγιστο ρεύμα στο κύκλωμα θα ήταν
   α) το ίδιο β) διπλάσιο γ) τετραπλάσιο

Σημειώστε τις σωστές απαντήσεις.

1.16 Συμπληρώστε τα κενά:

Όπως στις αμείωτες μηχανικές ταλαντώσεις η κινητική ενέργεια του συστήματος μετατρέπεται περιοδικά σε …………… και η ολική ενέργεια του συστήματος διατηρείται, έτσι και στις αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις η ……………..… πεδίου μετατρέπεται περιοδικά σε …………….. πεδίου ενώ το άθροισμά τους ………………….

Φθίνουσα, ελεύθερη και εξαναγκασμένη ταλάντωση. Συντονισμός.

1.17 Όταν αυξάνεται ο συντελεστής απόσβεσης σε ένα ταλαντούμενο σύστημα, η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος

α) δε μεταβάλλεται. β) αυξάνεται. γ) μειώνεται.

Επιλέξτε το σωστό.

1.18 Σε μία φθίνουσα ταλάντωση, η ενέργεια της ταλάντωσης

α) παραμένει σταθερή.

β) μειώνεται με σταθερό ρυθμό.

γ) μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.

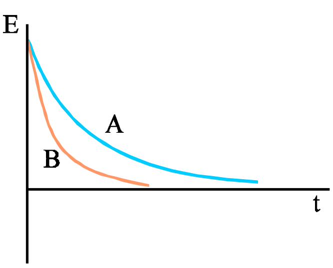
δ) αυξάνεται.

Επιλέξτε το σωστό.

1.19 Ένας ταλαντωτής τη στιγμή t_1 έχει ενέργεια E και πλάτος ταλάντωσης A. Η ενέργεια που έχει χάσει ο ταλαντωτής μέχρι τη στιγμή t_2, που το πλάτος της ταλάντωσης έχει μειωθεί στο μισό, είναι

α) $E/2$; β) $E/4$; γ) $3E/4$;

Επιλέξτε το σωστό.



Σχ. 1.42

1.20 Στο σχήμα 1.42 φαίνεται το διάγραμμα της ολικής ενέργειας E δύο κυκλωμάτων ηλεκτρικών ταλαντώσεων Α και Β, σε συνάρτηση με το χρόνο. Οι πυκνωτές στα δύο κυκλώματα έχουν την ίδια χωρητικότητα και τα πηνία τον ίδιο συντελεστή αυτεπαγωγής. Ποιο από τα δύο παρουσιάζει μεγαλύτερη ωμική αντίσταση;

1.21 Ένα σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές;

α) Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται με το χρόνο.

β) Η συχνότητα ταλάντωσης είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

γ) Το πλάτος της ταλάντωσης εξαρτάται από τη συχνότητα του διεγέρτη.

δ) Η ενέργεια που χάνεται λόγω των αποσβέσεων αναπληρώνεται από το διεγέρτη.

1.22 Κατά το συντονισμό

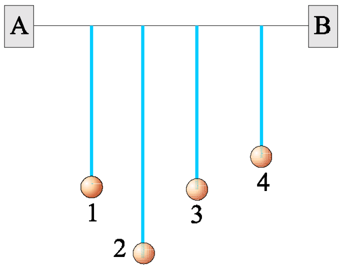
α) Η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή είναι μέγιστη.

β) Η ενέργεια του ταλαντωτή είναι μέγιστη.

γ) Το πλάτος της ταλάντωσης είναι μέγιστο.

δ) Οι απώλειες ενέργειας ελαχιστοποιούνται.

Επιλέξτε τα σωστά.



Σχ. 1.43

1.23 Στη διάταξη που παριστάνεται στο σχήμα 1.43 τα εκκρεμή 1,2,3, και 4 κρέμονται από το ίδιο σχοινί ΑΒ. Αν το εκκρεμές 1 απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του και αφεθεί ελεύθερο εκτελεί ταλάντωση με συχνότητα f. Το σχοινί ΑΒ εξαναγκάζει τα υπόλοιπα εκκρεμή σε ταλάντωση. Σε ποιο από τα εκκρεμή 2,3 και 4 το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι πιο μεγάλο;

1.24 Δύο πηνία με συντελεστές αυτεπαγωγής L_1 και L_2 είναι τυλιγμένα γύρω από τον ίδιο πυρήνα μαλακού σιδήρου. Το πρώτο συνδέεται με πυκνωτή χωρητικότητας C_1 και το δεύτερο με πυκνωτή χωρητικότητας C_2. Αν φορτίσουμε τον πυκνωτή χωρητικότητας C_1 το σύστημα L_1,C_1 εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση. Επειδή το πηνίο L_1 βρίσκεται σε επαγωγική σύζευξη με το πηνίο L_2, το δεύτερο κύκλωμα διεγείρεται επίσης σε ταλάντωση. Στον πίνακα που ακολουθεί αναγράφονται διάφορες τιμές για την αυτεπαγωγή των πηνίων και τη χωρητικότητα των πυκνωτών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στα δύο κυκλώματα. Επιλέξτε την κατάλληλη τετράδα ώστε η ηλεκτρική ταλάντωση που θα εκτελέσει το δεύτερο κύκλωμα να είναι έντονη.

	L_1	C_1	L_2	C_2
(α)	6 mH	2 μF	5 mH	3 μF
(β)	4 mH	8 μF	2 mH	16 μF
(γ)	5 mH	6 μF	4 mH	7 μF
(δ)	6 mH	4 μF	2 mH	8 μF

Σύνθεση ταλαντώσεων

1.25 Ένα σώμα κάνει ταυτόχρονα δυο αρμονικές ταλαντώσεις της ίδιας συχνότητας που γίνονται πάνω στην ίδια ευθεία, γύρω από το ίδιο σημείο. Τα πλάτη των ταλαντώσεων είναι, αντίστοιχα, 5cm και 3cm. Αν οι δύο ταλαντώσεις έχουν την ίδια φάση τότε το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα είναι A=……….. ενώ αν οι ταλαντώσεις έχουν διαφορά φάσης 180^o το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος είναι A=………

1.26 Ένα σώμα κάνει ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις του ίδιου πλάτους και της ίδιας διεύθυνσης. Οι συχνότητες f_1 και f_2 των δύο ταλαντώσεων διαφέρουν λίγο μεταξύ τους. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι ορθές;

α) Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

β) Το πλάτος της ταλάντωσης μεταβάλλεται με το χρόνο.

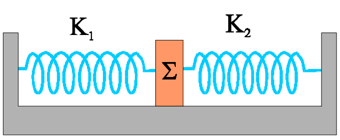
γ) Η μέγιστη τιμή του πλάτους είναι $2A$.

δ) Ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις του πλάτους είναι σταθερός.

ε) Ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους εξαρτάται από τη διαφορά f_1 - f_2 και μεγαλώνει όταν η διαφορά αυτή ελαττώνεται.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Απλή αρμονική ταλάντωση



Σχ. 1.44

1.27 Κάθε ελατήριο στο σχήμα 1.44 έχει το ένα άκρο του στερεωμένο σε ακίνητο σημείο και το άλλο του άκρο προσδεμένο στο σώμα Σ. Οι σταθερές των δύο ελατηρίων είναι K_1=120N/m και K_2=80N/m. Το σώμα Σ, έχει μάζα m=2kg και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Να αποδείξετε ότι η κίνηση που θα εκτελέσει το σώμα Σ, αν εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του είναι απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης.
[Απ: $T = 0{,}2\pi$ s]

1.28 Σώμα μάζας m=2 kg, κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι A=0,5 m. Όταν το σώμα απέχει από τη θέση ισορροπίας του x_1=0,3 m η ταχύτητά του είναι υ_1= 4 m/s.
α) Υπολογίστε τη σταθερά D της ταλάντωσης.
β) Υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας είναι x_2= 0,4 m.
[Απ : α) D = 200 N/m β) υ = 3 m/s]

1.29 Στην ελεύθερη άκρη ελατηρίου κρεμάμε σώμα με άγνωστη μάζα. Όταν αποκατασταθεί η ισορροπία η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι l=2,5 cm. Να υπολογιστεί η περίοδος της κατακόρυφης ταλάντωσης που θα κάνει το σώμα, αν το απομακρύνουμε από τη θέση ισορροπίας του και το αφήσουμε ελεύθερο. Δίνεται g=10 m/s^2.
[Απ: 0,314 s]

Ηλεκτρικές ταλαντώσεις

1.30 Κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων αποτελείται από πυκνωτή χωρητικότητας C=5 μF και πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L=4×10^{-3} H. Να υπολογίσετε τη συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται το κύκλωμα, αν διεγερθεί.

[Απ : 1126 Hz]

1.31 Κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων με πυκνωτή χωρητικότητας C=20$\times$10^{-6} F και πηνίο αυτεπαγωγής L=5$\times$10^{-2} H διεγείρεται σε ταλάντωση. Για τη διέγερση του κυκλώματος, τη χρονική στιγμή μηδέν ο πυκνωτής έρχεται στιγμιαία σε επαφή με του πόλους πηγής τάσης V=50 V. Να γράψετε τις σχέσεις του φορτίου στον πυκνωτή και της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα, σε συνάρτηση με το χρόνο.
[Απ: q=10^{-3} συν1000t i= ημ1000t (SI)]

Φθίνουσες και εξαναναγκασμένες ταλαντώσεις. Συντονισμός.

1.32 Κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων το οποίο αποτελείται από πυκνωτή χωρητικότητας $C_1=8\times10^{-6}$ F και πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής $L_1=3\times10^{-3}$ H βρίσκεται σε επαγωγική σύζευξη με δεύτερο κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων, που αποτελείται από πυκνωτή μεταβλητής χωρητικότητας (C_2) και πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής $L_2=4\times10^{-3}$ H. Αν διεγερθεί το πρώτο κύκλωμα εξαναγκάζεται σε ταλάντωση και το δεύτερο. Να υπολογιστεί η χωρητικότητα C_2 που πρέπει να έχει ο πυκνωτής του δεύτερου κυκλώματος ώστε η ταλάντωσή του να έχει μέγιστο πλάτος. Θεωρήστε αμελητέα την ωμική αντίσταση των δύο κυκλωμάτων.
[Απ : 6×10^{-6} F]

Σύνθεση ταλαντώσεων

1.33 Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις, με εξισώσεις $x_1 = 4\ \eta\mu 50t$ και $x_2 = 4\ \eta\mu(50t-\pi)$ (S.I.), που γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από το ίδιο σημείο. Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος;
[Απ : 0]

1.34 Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις με εξισώσεις, $x_1 = 10\ \eta\mu 50t$ και $x_2 = 4\ \eta\mu 50t$, που γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από το ίδιο σημείο. Τα πλάτη των δύο ταλαντώσεων είναι μετρημένα σε cm. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης, που εκτελεί το σώμα.
[Απ : $x = 0{,}14\ \eta\mu 50t$ (S.I.)]

1.35 Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις, με εξισώσεις $x_1 = 8\ \eta\mu 50\pi t$ και $x_2 = 6\ \eta\mu(50\pi t-\pi)$ που γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από το ίδιο σημείο. Τα πλάτη των δύο ταλαντώσεων είναι μετρημένα σε cm. Να γράψετε τις σχέσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος, σε συνάρτηση με το χρόνο και να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσής του.
[Απ: $\upsilon = 3{,}14\ \sigma\upsilon\nu 50\pi t$ *(m/s)*, $\alpha = -493\ \eta\mu 50\pi t$ *(m/s^2)*, $T = 0{,}04s$]

1.36 Όταν πάλλεται ένα διαπασών παράγει αρμονικό ήχο που φτάνει στο τύμπανο του αφτιού και το εξαναγκάζει να εκτελέσει ταλάντωση. Αν κολλήσουμε ένα μικρό κομμάτι πλαστελίνης στο ένα στέλεχος ενός διαπασών, οι συχνότητες των ήχων που δημιουργούνται από τα δύο στελέχη του διαφέρουν ελάχιστα. με αποτέλεσμα το τύμπανο να εκτελεί μια σύνθετη ταλάντωση. Οι συχνότητες των ήχων που δημιουργούνται με αυτό τον τρόπο στο διαπασών είναι f_1=2500 Hz και f_2=2500,5 Hz. Ένας άνθρωπος που ακούει το διαπασών, αντιλαμβάνεται ένα ήχο ο οποίος άλλοτε ΄΄σβήνει΄΄ και άλλοτε αποκτά μέγιστη ένταση. Ποιος είναι ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς της έντασης του ήχου;
[Απ : 2 s]

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1.37 Σώμα μάζας m=1kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T=0,2π s. Τη χρονική στιγμή μηδέν το σώμα απέχει απόσταση x=2cm, από τη θέση ισορροπίας του, έχει ταχύτητα $\upsilon = 0{,}2\sqrt{3}\, m/s$ και κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας. Να γράψετε τις σχέσεις που δίνουν την απομάκρυνση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

[Απ: $x = 4\times 10^{-2}\eta\mu\left(10t+\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $\upsilon = 0{,}4\sigma\upsilon\nu\left(10t+\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $a = -4\eta\mu\left(10t+\dfrac{5\pi}{6}\right)$, (SI)]

1.38 Στην ελεύθερη άκρη κατακόρυφου ελατηρίου, σταθεράς K=100N/m, ή άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο, κρεμάμε σώμα μάζας m=1 kg. Το σώμα απομακρύνεται κατά d=5 cm από τη θέση ισορροπίας του και τη στιγμή μηδέν αφήνεται ελεύθερο. Να υπολογίσετε:

α) τη συχνότητα της ταλάντωσης που θα εκτελέσει.

β) την αρχική φάση στην ταλάντωσή του.

γ) τη μέγιστη ταχύτητα που αποκτά κατά την κίνησή του

δ) τη μέγιστη επιτάχυνση που έχει.

ε) τη μέγιστη δύναμη που δέχεται από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του.

Δίνεται g=10 m/s^2.

[Απ: α) 5/π Hz β) π/2 γ) 0,5 m/s δ) 5 m/s^2 ε) 15 N]

1.39 Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A=20 cm με περίοδο T=10 s. Τη χρονική στιγμή μηδέν το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας. Να υπολογιστεί επί πόσο χρόνο (μέχρι να επιστρέψει στη θέση ισορροπίας) η απομάκρυνση του θα είναι μεγαλύτερη από x=10cm.

[Απ: 10/3 s]

1.40 Ο εμπρόσθιος προφυλακτήρας ενός αυτοκινήτου συμπεριφέρεται σαν ιδανικό ελατήριο σταθεράς K=25×10^5 N/m.

α) Η μάζα του οχήματος, μαζί με τους επιβάτες του είναι M=1000 kg. Το αυτοκίνητο συγκρούεται μετωπικά με ακίνητο εμπόδιο, ενώ κινείται με ταχύτητα υ=18 km/h. Υπολογίστε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου – προφυλακτήρα- καθώς και τη χρονική διάρκεια της συσπείρωσης.

β) Ένας επιβάτης έχει μάζα m=60 kg. Υπολογίστε τη μέγιστη οριζόντια δύναμη που πρέπει να δεχτεί από τη ζώνη πρόσδεσης, ώστε να μην εκτιναχτεί από το κάθισμα κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης.

<u>Σημείωση</u>: Θα θεωρήσετε ότι κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης οι τριβές και οι αντιστάσεις είναι αμελητέες και ότι ο κινητήρας του οχήματος δε λειτουργεί.

[Απ : α) 0,1 m, π/100 s, β) 15×10^3 N]

1.41 Ακίνητο σώμα μάζας M=100 g βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι προσδεμένο στην άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς K=300 N/m, ή άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη ακλόνητα. Βλήμα μάζας m=20 g, που κινείται στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου με ταχύτητα υ=30 m/s, συγκρούεται με το σώμα M και σφηνώνεται σε αυτό. Να υπολογίσετε:

α) την κοινή ταχύτητα που αποκτούν τα δύο σώματα αμέσως μετά τη σύγκρουση.

β) το διάστημα που θα διανύσει το συσσωμάτωμα, μέχρι να σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά.

γ) σε πόσο χρόνο από τη στιγμή της σύγκρουσης το συσσωμάτωμα θα σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά.

Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

[Απ: 5 m/s, 0,1 m, $3{,}14\times10^{-2}$ s]

1.42 Κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων αποτελείται από πυκνωτή χωρητικότητας $C=5\times10^{-5}$ F και πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής $L=10^{-4}$ H. Η αντίσταση του κυκλώματος είναι $R=2\Omega$. Οι οπλισμοί του πυκνωτή έρχονται στιγμιαία σε επαφή με τους πόλους πηγής ηλεκτρεγερτικής δύναμης E=20V. Το κύκλωμα διεγείρεται και εκτελεί ταλάντωση. Πόση ενέργεια πρέπει να προσφέρεται ανά περίοδο στο κύκλωμα ώστε να εκτελεί αμείωτη ταλάντωση; Δίνεται ότι η συχνότητα ταλάντωσης ενός τέτοιου, μη ιδανικού, κυκλώματος είναι $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$.

<u>Σημείωση :</u> Θεωρούμε ότι όλες οι απώλειες οφείλονται στην ωμική αντίσταση που παρουσιάζει το κύκλωμα.

[Απ : $4\pi\times10^{-2}$ J]

1.43 Πυκνωτής χωρητικότητας $C=4\times10^{-5}$ F φορτίζεται σε τάση V=100 V. Στη συνέχεια οι οπλισμοί του συνδέονται στα άκρα πηνίου με συντελεστή αυτεπαγωγής L=0,9 H και το κύκλωμα εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση.

α) Ποιο είναι το μέγιστο φορτίο που απέκτησε ο πυκνωτής κατά τη φόρτισή του;

β) Ποιο είναι το φορτίο του πυκνωτή τη στιγμή που η ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή είναι ίση με την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο;

γ) Ποια χρονική στιγμή η ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου γίνεται, για πρώτη φορά, ίση με την ενέργεια μαγνητικού πεδίου; Στιγμή μηδέν θεωρείται η στιγμή που ο πυκνωτής συνδέθηκε με το πηνίο.

[Απ: α) 4×10^{-3} C β) $2\sqrt{2}\times10^{-3}$ C γ) $1{,}5\pi\times10^{-3}$ s]

1.44 Κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων περιλαμβάνει πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L=16 mH και πυκνωτή χωρητικότητας $C=4\times10^{-5}$ F. Κάποια στιγμή το φορτίο στον πυκνωτή είναι q=20 μC και η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα $i=25\sqrt{3}$ mA. Ποιο είναι το μέγιστο φορτίο που αποκτά ο πυκνωτής κατά την ηλεκτρική ταλάντωση;
[Απ: 40 μC]

1.45 Σώμα μάζας m= 2kg εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις της ίδιας διεύθυνσης γύρω από το ίδιο σημείο. Οι εξισώσεις των ταλαντώσεων είναι $x_1 = 10\ \eta\mu 50\pi t$ και $x_2 = 5\ \eta\mu(50\pi t - \pi)$. Τα πλάτη των δύο ταλαντώσεων είναι μετρημένα σε cm.

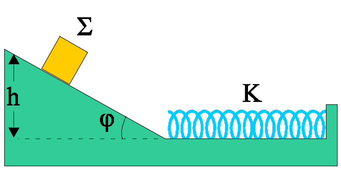
α) Ποια είναι η σταθερά D της αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα;

β) Ποια είναι η ενέργεια της ταλάντωσης;

γ) Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν η απομάκρυνσή του είναι x=4 cm;

Δίνεται $\pi^2 \approx 10$.

[Απ : $D=5\times10^4$ N/m, E=62,5 J, $\upsilon=3\sqrt{2,5}$ m/s]



Σχ. 1.45

1.46 Το σώμα Σ με μάζα m κατεβαίνει χωρίς τριβές στο πλάγιο επίπεδο. Στη βάση του συναντά οριζόντιο ελατήριο σταθεράς K που επιβραδύνει την οριζόντια κίνησή του. Η κίνηση του σώματος είναι τελικά, στο σύνολο της, περιοδική. Η κλίση του πλάγιου επιπέδου είναι φ, και το ύψος από όπου άρχισε να κατεβαίνει το σώμα h. Υπολογίστε την περίοδο της κίνησης του σώματος Σ.

[Απ: $2\sqrt{\dfrac{2h}{g\,\eta\mu^2\phi}} + \pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$]

1.47 Κατακόρυφο ελατήριο με σταθερά K=100 N/m έχει το κάτω άκρο του προσκολλημένο στο δάπεδο. Στο επάνω άκρο του ελατηρίου έχει προσδεθεί σώμα μάζας m_1=1 kg, που ισορροπεί. Δεύτερο σώμα άγνωστης μάζας m_2 βρίσκεται πάνω από το πρώτο σε άγνωστο ύψος h. Μετακινούμε το πρώτο σώμα προς τα κάτω κατά l=0,2m και το αφήνουμε ελεύθερο, ενώ την ίδια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο και το δεύτερο σώμα.

α) Να υπολογίσετε το ύψος h για το οποίο η συνάντηση των δύο σωμάτων γίνεται στη θέση ισορροπίας του πρώτου σώματος.

β) Να υπολογίσετε τη μάζα m_2 για την οποία, μετά την κρούση, τα δύο σώματα ξαναγυρίζουν στις αρχικές τους θέσεις (στις θέσεις που είχαν όταν αφέθηκαν ελεύθερα).

γ) Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων.

Δίνονται $g = 10\,m/s^2$, $\pi^2 \approx 10$.

[Απ : 0,125 m, 1,26 kg, 0,314 s]

1.48 Σώμα μάζας m= 2kg είναι προσκολλημένο στην πάνω άκρη ενός κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς K=200 N/m και ισορροπεί στη θέση Α. Η άλλη άκρη του ελατηρίου συνδέεται ακλόνητα στο δάπεδο. Εξασκώντας κάποια μεταβλητή κατακόρυφη δύναμη F', μετακινούμε το σώμα προς τα κάτω κατά α=20 cm, μέχρι τη θέση Γ και το αφήνουμε ελεύθερο, οπότε το σώμα ανεβαίνει μέχρι τη θέση Δ όπου στιγμιαία η ταχύτητα του γίνεται μηδέν. Να υπολογίσετε:

α) το έργο της δύναμης F'.

β) το έργο της δύναμης του ελατηρίου για την κίνηση του σώματος, από τη θέση Γ στη θέση Δ..

Δίνεται g=10 m/s^2.

[Απ: 4J, 8J]

1.49 Σώμα μάζας m_1=0,45 kg βάλλεται κατακόρυφα από το έδαφος και σε ύψος h=15 m συναντά ένα κομμάτι ξύλου μάζας m_2=0,3 kg που κρέμεται από ελατήριο σταθεράς K=12 N/m. Τα δύο σώματα μετά τη σύγκρουση ενώνονται και κινούνται σαν ένα.

α) Με ποια ταχύτητα πρέπει να βληθεί το σώμα ώστε, μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα να φτάσει μέχρι τη θέση στην οποία το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος;

β) Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το συσσωμάτωμα κατά την κάθοδο του; Μετά από πόσο χρόνο, από τη στιγμή που βρέθηκε στην ανώτερη θέση το συσσωμάτωμα αποκτά τη μέγιστη ταχύτητα;

Δίνεται g=10m/s^2.

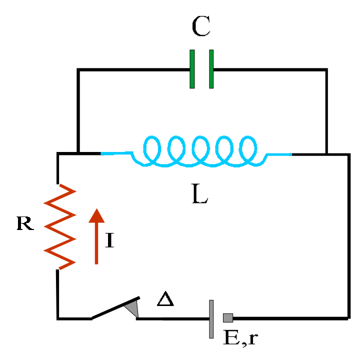
[Απ: α) 17,6 m/s, β) 2,5 m/s, 0,4 s]

1.50 Στο κύκλωμα του σχήματος 1.46 δίνονται E=6 V,R=2Ω,L=0,2×10^{-3}H, r=0. Αρχικά ο διακόπτης Δ είναι κλειστός, το κύκλωμα διαρρέεται από σταθερό ρεύμα και ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος. Όταν ανοίξουμε το διακόπτη ο πυκνωτής φορτίζεται.

α) Εξηγήστε γιατί φορτίζεται ο πυκνωτής;

β) Ποια πρέπει να είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή ώστε η τάση στους οπλισμούς του να μην υπερβεί τα 10V;

[Απ : 18 μF]



Σχ. 1.46

ΕΝΘΕΤΟ

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ ΣΤΗΝ ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΤΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

Αρμονική ταλάντωση είναι η ευθύγραμμη κίνηση στην οποία η απομάκρυνση x, του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη συνάρτηση $x = A\eta\mu\omega t$

Η ταχύτητα ενός σώματος, που κινείται ευθύγραμμα, κάποια χρονική στιγμή, είναι : $\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Το όριο αυτό, αν υπάρχει, ονομάζεται παράγωγος του x ως προς t και το σύμβολό του είναι $\frac{dx}{dt}$.

Η ταχύτητα υ ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = [A\eta\mu\omega t]' \qquad (1.36)$$

Η παράγωγος μιας σύνθετης συνάρτησης $f(g(t))$ είναι

$$[f(g(t))]' = f'(g(t))\ g'(t)$$

Οι παράγωγοι των συναρτήσεων $\eta\mu\, u$ και $\sigma\upsilon\nu\, u$ είναι

$$\eta\mu' u = \sigma\upsilon\nu\, u \qquad \sigma\upsilon\nu' u = -\eta\mu\, u$$

άρα

$$[A\ \eta\mu\omega t]' = A\ \eta\mu'\omega t\ (\omega t)' = A\omega\ \sigma\upsilon\nu\omega t$$

και η (1.36) γίνεται

$$\upsilon = A\omega\ \sigma\upsilon\nu\omega t \qquad (1.37)$$

Το γινόμενο $A\omega$ είναι σταθερό, έχει διαστάσεις ταχύτητας και εκφράζει τη μέγιστη ταχύτητα που αποκτάει το σώμα. Θέτοντας $\upsilon_{max} = A\omega$ η (1.37) γίνεται : $\upsilon = \upsilon_{max}\ \sigma\upsilon\nu\omega t$

Η επιτάχυνση ενός σώματος, που κινείται ευθύγραμμα, κάποια στιγμή είναι: $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$

Το όριο αυτό είναι η παράγωγος της ταχύτητας ως προς το χρόνο (συμβολίζεται $\frac{d\upsilon}{dt}$).

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = [A\omega\ \sigma\upsilon\nu\omega t]' = A\omega\ \sigma\upsilon\nu'\omega t\ (\omega t)' = -A\omega^2\ \eta\mu\omega t \quad (1.38)$$

Το γινόμενο $A\omega^2$ είναι σταθερό, έχει διαστάσεις επιτάχυνσης και εκφράζει τη μέγιστη επιτάχυνση που αποκτά το σώμα κατά την κίνησή του. Αντικαθιστώντας $A\omega^2 = \alpha_{max}$ η σχέση (1.38) παίρνει την πιο συνηθισμένη της μορφή

$$a = -a_{max}\ \eta\mu\omega t$$